Exemples de questions de colles

Pour les colles de M104PC, vous pouvez préparer une démonstration de votre choix et l'exposer en colle. L'enseignant vérifiera que vous connaissez tous les termes que vous employez, que vous comprenez chaque étape du raisonnement et que vous ne faites pas d'erreurs de logique. Si la démonstration proposée est trop facile, il vous posera des questions supplémentaires. Vous pouvez choisir de préparer une des questions suivantes et de l'exposer en colle. Attention : le cours ne sera pas admis pendant la colle.

1. Soient $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes, d'éléments neutres e_1 et e_2 respectivement. Montrer que tout morphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ vérifie :
   (a) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}, \forall x \in G_1$;
   (b) $f(e_1) = e_2$
2. Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1, et que $\mathrm{Im} f$ est un sous-groupe de G_2.
3. Démontrer le théorème de Lagrange.
4. Montrer que les transpositions engendrent le groupe S_n des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et décomposer un m-cycle en produit de transpositions.
5. Montrer que la signature d'une permutation $\sigma \in S_n$ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ où p est le nombre de cycles de longueurs paires dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.
6. Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire, on a l'équivalence :
$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}.$$
7. Montrer qu'une famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre si et seulement si aucun des vecteurs $\vec{v}_i$, $1 \le i \le k$, n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.
8. Montrer qu'une famille de $(m+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est nécessairement liée.
9. Montrer qu'une famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est une base d'un sous-espace vectoriel P de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur de P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\dots$, $\vec{v}_k$.
10. Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toutes les bases de P ont le même nombre de vecteurs.
11. Montrer que tout sous-espace $P \neq \{\vec{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$ admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.
12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Montrer que :
    (a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$;
    (b) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
13. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
14. Démontrer le théorème du rang.
15. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que l'on a équivalence entre :
    (a) f est bijective
    (b) f est injective
    (c) f est surjective.

16. Soit f une application linéaire. Expliquer comment calculer des bases de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ et expliquer pourquoi cette technique fonctionne.
17. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et A, B leurs matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Montrer que $f+g$ est une application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ est $A+B$.
18. Soient $f\ :\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $g\ :\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires, A la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, et B la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Montrer que la matrice de $g \circ f$ est BA.
19. Montrer que le rang d'une matrice en échelons est le nombre de lignes non-nulles de la matrice.
20. Montrer qu'on ne change pas le rang d'une matrice lorsque :
    (a) on échange deux colonnes de A ;
    (b) on multiplie une colonne par un coefficient non nul ;
    (c) on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
21. Montrer que le volume d'un parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ est la valeur absolue du déterminant de $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$.
22. Montrer que $\det A = \det A^T$, où A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.
23. Montrer que le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux lignes de la matrice.
24. Soit $\sigma \in S_n$ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\det(\vec{v}_{\sigma(1)}, \vec{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.
25. Montrer que $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
26. Montrer que pour toute matrice inversible A, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
27. Montrer que pour toute matrice A de taille (n,n), on a $(\mathrm{comat}(A))^T A = \det(A) I_n$, où I_n est la matrice identité de taille (n,n).
28. Montrer que la solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'un système de Cramer $(\mathcal{S})$ de matrice A est donnée par :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)},$$

    où Δ_j est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $j^{\text{ième}}$-colonne de A par le second membre de $(\mathcal{S})$.