

Nom :

Aucun document n'est autorisé : ni notes de cours, ni calculatrice, ni téléphone portable. Merci de répondre directement sur la feuille (vous pouvez utiliser une feuille de brouillon).

Questions de cours :

1. (a) Donner la définition d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

(b) Donner la définition du noyau de f .

(c) Donner la définition du rang de f .

(d) Énoncer (précisément) le théorème du rang.

2. (a) Quelle est la définition d'une application injective ?

(b) Donner une définition équivalente dans le cas d'une application linéaire.

(c) Quelle est la définition d'une application surjective ?

(d) Quelle est la définition d'une application bijective ?

3. Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .

Peut-elle être injective ?

surjective ?

bijective ?

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 2x - y - z \\ x - 2y - 2z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$$

(a) Donner la matrice de f (dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4).

(b) Donner une base de $\text{Im} f$ et une base de $\text{Ker} f$.

(c) Le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient-il à $\text{Ker} f$?

(d) Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ?

(e) Le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ?

Exercice 2 Résoudre, en fonction des valeurs de a , le système suivant :

$$\begin{cases} ax + (a - 1)y = 1 \\ (a + 1)x - ay = 2 \end{cases}$$