

Nom : .....

Aucun document n'est autorisé : ni notes de cours, ni calculatrice, ni téléphone portable. Merci de répondre directement sur la feuille (vous pouvez utiliser une feuille de brouillon).

Questions de cours :

1. Donner un exemple de groupe.

2. Donner la définition du rang d'une application linéaire  $f$ .

3. Les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

4. Les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^4$  ?

5. Les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^2$  ?

Exercice 1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui représente  $f$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

1. (a) Calculer les valeurs propres de  $A$ .
- (b) En déduire que l'on peut diagonaliser  $A$ .

2. (a) Déterminer une base  $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  de vecteurs propres de  $A$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base? On la notera  $D$ .
- (b) Préciser la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ; quelle relation lie les matrices  $A$ ,  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $D$ ?
3. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
4. Après avoir donné  $D^n$ , calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ y + z + 2t = 1 \end{cases}$$