Université Lille I — Année 2009

Groupe 13 PC $1^{\text{ère}}$ année — **Interrogation écrite n° 3**

Nom : ....

Aucun document n'est autorisé : ni notes de cours, ni calculatrice, ni téléphone portable. Merci de répondre directement sur la feuille (vous pouvez utiliser une feuille de brouillon).

Questions de cours :

1. Donner un exemple de groupe.

2. Donner la définition du rang d'une application linéaire f.

3. Les vecteurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

4. Les vecteurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

5. Les vecteurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui représente f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) En déduire que l'on peut diagonaliser A.

2. (a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs propres de A. Quelle est la matrice de f dans cette base ? On la notera D.
   (b) Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; quelle relation lie les matrices A, P, P^{-1} et D ?
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Après avoir donné D^n, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + 2z + t = 0 \\ y + 2z + 2t = 1 \end{array} \right.$$