Introduction aux groupes et algèbres de Lie

PROGRAMME DE LA PREMIERE PARTIE DU COURS

I. Définitions et exemples de groupes de Lie
   1. Introduction des groupes de Lie classiques : $Gl(n, \mathbb{C})$, $Sl(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $Gl(n, \mathbb{R})$, $Sl(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $Sp(n, \mathbb{R})$.
   2. Variété et sous-variétés : Exemples de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{RP}(n)$, $\mathbb{CP}(n)$. Définitions de variété, immersion, plongement, submersion, sous-variété. Application : les groupes de matrices classiques sont des sous-variétés de $M(n, \mathbb{C})$.
   3. Groupes de Lie et sous-groupes de Lie : Définitions et exemples des groupes de Lie classiques.

II. Algèbre de Lie associée à un groupe de Lie
   1. Vecteurs tangents, champs de vecteurs, crochet de champs de vecteurs.
   2. Champs de vecteurs invariants à droite ou à gauche.
   3. Définition et exemples d'algèbres de Lie.

III. Application exponentielle d'un groupe de Lie
   1. Equations différentielles et sous-groupes à un paramètre.
   2. Définition de l'application exponentielle d'un groupe de Lie et exemples.
   3. Théorème de Von Neumann.
   4. Morphismes de groupes de Lie et d'algèbres de Lie.
   5. Différentielle de l'exponentielle.
   6. Formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

IV. Action adjointe et classes de similitude
   1. Actions de groupes et représentation adjointe.
   2. Classes de similitude de matrices, réduite de Jordan, polynôme minimal, polyôme caractéristique, matrices compagnons, ensemble des matrices de rang donné.

V. Diverses décompositions des groupes de Lie classiques
   1. Décompostion polaire et décompositions de Mostow.
   2. Décomposition d'Iwasawa.
   3. Décomposition de Bruhat.

VI. Des algèbres aux groupes
   1. Bijection entre sous-groupes connexes et sous-algèbres de Lie.
   2. Revêtement universel d'un groupe de Lie.
   3. Correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie simplement connexes.

Références

[1] A. Arvanitoyeorgos, *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, AMS, Student Mathematical Library, Volume 22, 2003.

[2] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, New York : Academic Press, 1978.

[3] R. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann 1986.

[4] R. Mneimné, *Eléments de géométrie : Actions de groupes*, Cassini, 1997.

[5] R. Mneimné, *réduction des endomorphismes*, Calvage et Mounet, Paris, 2006.

[6] H. Samelson, *Notes on Lie Algebras*, Springer-Verlag, Universitext, 1990.

[7] J. P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966 (25 SER 66). Traduit dans *Complex semisimple Lie algebras*, Springer, 1987.

[8] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Prentice Hall, 1974.

[9] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co.,1971.

MATHÉMATIQUES, UMR 8524 CNRS
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
59655 VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE
E-mail address : `livio.flaminio@math.univ-lille1.fr`
E-mail address : `barbara.tumpach@math.univ-lille1.fr`

Les informations relatives au cours seront mises en ligne à l'adresse :
`http ://math.univ-lille1.fr/ tumpach/Site/Enseignement.html`