Structure de groupe – Permutations

Le but de cette feuille d'exercices est de se familiariser avec la notion de groupe et d'apprendre à calculer la signature d'une permutation.

Exercice 1 On munit l'ensemble $G = \{a, b, c, d\}$ d'une loi de composition interne dont la table de Pythagore est

$\star$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

1. Cette loi possède-t-elle un élément neutre ?
2. Cette loi est-elle commutative ?
3. Cette loi est-elle associative ?
4. Est-ce une loi de groupe ?

Exercice 2 On définit une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 15\}$ par la suite finie des entiers $\sigma(1)$, $\sigma(2), \dots, \sigma(15)$. Par exemple

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 7 & 1 & 14 & 3 & 12 & 8 & 9 & 6 & 15 & 13 & 4 & 10 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

signifie $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 7$, etc...Soient

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 3 & 2 & 15 & 4 & 11 & 13 & 10 & 12 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 15 & 2 & 14 & 3 & 13 & 4 & 12 & 5 & 11 & 6 & 10 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour $i = 1, \dots, 4$,
   - décomposer σ_i en cycles à supports disjoints.
   - déterminer l'ordre de σ_i.
   - déterminer la signature de σ_i.
2. Calculer les puissances successives du cycle $\sigma = (10\ \ 15\ \ 11\ \ 13)$. Quel est l'inverse de σ_1 ?
3. Calculer σ_2^{2008}.
4. Déterminer, sans fatigue excessive, la signature de
$$\sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-4} \circ \sigma_4^3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-1} \circ \sigma_4^{-6}.$$
5. Combien y a-t-il de permutations g de $\{1, \dots, 15\}$ telles que $\sigma_1 \circ g = g \circ \sigma_1$?

Exercice 3 1. Montrer que les ensembles G suivants, munis des lois $\star$ données, sont des groupes. Préciser quel est l'élément neutre de G et quel est l'inverse d'un élément quelconque $x \in G$.

(a) $G = \mathbb{Z}$, $\star =$ l'addition des nombres ;

(b) $G = \mathbb{Q}^*$ (ensemble des rationnels non nuls), $\star =$la multiplication des nombres ;

(c) $G = \mathbb{Q}^{+*}$ (ensemble des rationnels strictement positifs), $\star =$ la multiplication des nombres ;

(d) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ l'addition des nombres ;

(e) $G = \mathbb{R}^{+*}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

(f) $G = \mathbb{C}$, $\star =$ l'addition des nombres ;

(g) $G = \mathbb{C}^*$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

(h) $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

(i) $G = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres (n est un entier fixé) ;

(j) $G =$ l'ensemble des bijections d'un ensemble non vide E, $\star =$ la composition des applications ;

(k) $G =$ l'ensemble des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire standard), $\star =$ la composition des applications ;

(l) $G =$ l'ensemble des isométries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire standard) qui préserve une figure données, $\star =$ la composition des applications ;

2. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$;
3. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$;
4. Donner un morphisme de groupes surjectif entre $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

Exercice 4 Dire pour quelle(s) raison(s) les opérations $\star$ suivantes ne munissent pas les ensembles G donnés d'une structure de groupe ?

(a) $G = \mathbb{N}$, $\star =$ l'addition des nombres ;

(b) $G = \mathbb{N}^{+*}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;

(c) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;