Groupes de Lie classiques

Le but de cette feuille d'exercices est de se familiariser avec les variétés et les groupes de Lie classiques.

Questions de compréhension :

1. La topologie induite est-elle la plus fine ou la plus grossière rendant l'injection canonique continue ?
2. La topologie quotient est-elle la plus fine ou la plus grossière rendant la projection canonique continue ?
3. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est un compact de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. Est-ce aussi un compact de $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$?
4. Les fermés bornés de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sont-ils compacts ?
5. Peut-on définir la notion d'application de classe $\mathbb{C}^r$, $r > k$, entre deux variétés de classe $\mathbb{C}^k$?

Exercice 1 *(Groupes de Lie classiques comme sous-variétés de $M_n(\mathbb{C})$)*

1. Montrer que $\mathrm{U}(n)$ est une sous-variété réelle de $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $\mathrm{U}(n)$ est compact.
3. Montrer que $\mathrm{SU}(n)$ est une sous-variété réelle de $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
4. Montrer que $\mathrm{SU}(n)$ est compact.
5. Montrer que $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(2n, \mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
6. Montrer que $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(2n, \mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
7. Montrer que le déterminant de $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ vaut 1.

Exercice 2 *(Sphères et espaces projectifs réels)* On notera O l'origine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :
$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}.$$
La projection stéréographique de pôle $P \in \mathbb{S}^n$ est l'application de $\mathbb{S}^n$ dans l'hyperplan vectoriel H_P orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OP}$, qui à un élément $Q \in \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ associe l'intersection de la droite (PQ) avec l'hyperplan H_P.
   (a) Écrire les coordonnées de l'image de $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ par la projection stéréographique φ_N de pôle $N = (0, \ldots, 0, 1)$.
   (b) Écrire les coordonnées de l'image de $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ par la projection stéréographique φ_S de pôle $S = (0, \ldots, 0, -1)$.
   (c) Quelle est la bijection réciproque φ_N^{-1} de φ_N ?
   (d) Quelle est la bijection réciproque φ_S^{-1} de φ_S ?
   (e) Montrer que φ_N et φ_S sont des homéomorphismes lorsqu'on munit $\mathbb{S}^n$ de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (f) Montrer que l'application $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en déduire que la sphère $\mathbb{S}^n$ est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (g) Montrer que l'application antipodale $\sigma\ : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ qui à $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ associe $-(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
2. Soit $\mathbb{RP}(n)$ l'espace projectif réel de dimension n, défini comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour $i = 1, \ldots, n+1$, on note H_i l'hyperplan vectoriel d'équation $x_i = 0$, et $\mathcal{H}_i$ l'ensemble des droites vectorielles contenues dans H_i. Notons φ_i l'application qui à une droite D de $\mathbb{RP}(n) \setminus \mathcal{H}_i$ associe l'intersection de D avec l'hyperplan affine d'équation $x_i = 1$.
   (a) Calculer l'image par φ_i de la droite $D \in \mathbb{RP}(n) \setminus \mathcal{H}_i$ de vecteur directeur $(x_1, \ldots, x_{n+1})$.
   (b) On munit $\mathbb{RP}(n)$ de la topologie la plus grossière rendant les applications φ_i continues (une base d'ouverts pour cette topologie est donnée par l'ensemble des $\varphi_i^{-1}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de l'hyperplan d'équation $x_i = 1$, et où $i = 1, \ldots, n$). Montrer que φ_i est une application ouverte si et seulement si $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est continue quelque soit $j = 1, \ldots, n+1$.

(c) Montrer que cette topologie est séparée.

(d) Montrer que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

(e) En déduire que $\mathbb{RP}(n)$ munit de $(\mathbb{RP}(n) \setminus \mathcal{H}_i, \varphi_i)_{i=1,\dots,n+1}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. Sur $\mathbb{S}^n$ on définit la relation d'équivalence suivante : $v \sim w$ si et seulement si $v = w$ ou $v = -w$. Soit π la projection canonique de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^n/\sim$. On munit $\mathbb{S}^n/\sim$ de la topologie quotient (un ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathbb{S}^n/\sim$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{S}^n$).
   (a) Montrer que π est une application ouverte.
   (b) Montrer que $\mathbb{S}^n/\sim$ est séparé.
   (c) Soit f l'application qui à un élément $Q \in \mathbb{S}^n$ associe la droite $(OQ) \in \mathbb{RP}(n)$. Montrer que f est continue (lorsque l'on munit $\mathbb{S}^n$ de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{RP}(n)$ de la topologie définie en 2.(b)).
   (d) Montrer que f définit par passage au quotient un homéomorphisme $\bar{f}$ de $\mathbb{S}^n/\sim$ dans $\mathbb{RP}(n)$.

Exercice 3 *(Espaces projectifs complexes)*
Soit $\mathbb{CP}(n)$ l'espace projectif complexe de dimension n, défini comme l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ (une droite vectorielle complexe est un sous-espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire de la forme $D = \{\lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ pour un vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$).

1. En s'inspirant de l'exercice 2, munir $\mathbb{CP}(n)$ d'une structure de variété $\mathbb{C}^\infty$ rélle de dimension $2n$.
2. Montrer que les changements de cartes sont en fait des applications holomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}^n$. En déduire que $\mathbb{CP}(n)$ est une variété holomorphe de dimension n.
3. On considère la sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{C}^{n+1}$:
$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1\}$$
Soit F l'application de $\mathbb{S}^{2n+1}$ dans $\mathbb{CP}(n)$ qui à $Q \in \mathbb{S}^{2n+1}$ associe la droite vectorielle complexe passant par Q. Montrer que F est continue.
4. Sur $\mathbb{S}^{2n+1}$ on définit la relation d'équivalence $\approx$ suivante : deux éléments $v = (z_1, \dots, z_{n+1})$ et $w = (z'_1, \dots, z'_{n+1})$ de $\mathbb{S}^{2n+1}$ sont équivalents si et seulement si $v = \lambda w$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1. On note Π la projection canonique de $\mathbb{S}^{2n+1}$ dans $\mathbb{S}^{2n+1}/\approx$. Montrer que F définit par passage au quotient un homéomorphisme $\bar{F}$ de $\mathbb{S}^{2n+1}/\approx$ dans $\mathbb{CP}(n)$.

Exercice 4 *(Exercice de première année sur les groupes...pour votre bon souvenir...)*

1. Montrer que les ensembles G suivants, munis des lois $\star$ données, sont des groupes. Préciser quel est l'élément neutre de G et quel est l'inverse d'un élément quelconque $x \in G$.
   (a) $G = \mathbb{Z}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (b) $G = \mathbb{Q}^*$ (ensemble des rationnels non nuls), $\star =$la multiplication des nombres ;
   (c) $G = \mathbb{Q}^{+*}$ (ensemble des rationnels strictement positifs), $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (d) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (e) $G = \mathbb{R}^{+*}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (f) $G = \mathbb{C}$, $\star =$ l'addition des nombres ;
   (g) $G = \mathbb{C}^*$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (h) $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres ;
   (i) $G = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$, $\star =$ la multiplication des nombres (n est un entier fixé) ;
   (j) $G =$ l'ensemble des bijections d'un ensemble non vide E, $\star =$ la composition des applications ;
   (k) $G =$ l'ensemble des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire standard), $\star =$ la composition des applications ;
   (l) $G =$ l'ensemble des isométries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire standard) qui préserve une figure données, $\star =$ la composition des applications ;
2. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$;
3. Donner un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$;
4. Donner un morphisme de groupes surjectif entre $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;