Université Lille I Année 2009

PC $1^{\text{ère}}$ année **feuille d'exercices n° 2**

Résolution de systèmes linéaires par la méthode du Pivot de Gauss

---

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre la technique de résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss. Mais d'abord, qu'est-ce un système linéaire ?

Exercice 1 Décider, pour chacun des systèmes d'équations aux inconnues x_1, x_2, ..., x_n et aux paramètres s, t, s'il est linéaire :

$$a)\left\{\begin{array}{cccccc} x_1\sin(t) & + & x_2 & = & 3 \\ x_1e^t & + & 3x_2 & = & t^2 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{cccccc} \frac{1}{x_1} & +\frac{2}{x_2} & +\dots & +\frac{n}{x_n} & = & n! \\ x_1 & +\frac{x_2}{2} & +\dots & +\frac{x_n}{n} & = & \frac{1}{n!} \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{ccc} \sqrt{(x_1+sx_2+t)^2-4sx_2(x_1+t)} & = & 0 \\ x_1\ln s-\pi x_2+e^tx_n & = & 0 \end{array}\right. \quad d)\left\{\begin{array}{ccc} (1+sx_1)(3+tx_2)-(2+tx_1)(5+sx_2) & = & 8 \\ (x_3+s)^2-(x_3-s)^2+x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 En appliquant l'algorithme de Gauss, résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathcal{S}\ :\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Exercice 3 Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$\mathcal{S}_a\ :\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :
   (i) n'admettre aucune solution ;
   (ii) admettre exactement une solution ;
   (iii) admettre une infinité de solutions.
2. Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 6 Les vecteurs complexes (z, w) et (z', w') sont liés par la formule $(z', w') = (z + iw, (1 + i)z + (1 - 2i)w)$. Un étudiant qui n'aime pas les nombres complexes pose $z = x + iy$, $w = u + iv$, $z' = x' + iy'$ et $w' = u' + iv'$.

1. Exprimer (x', y', u', v') en fonction de (x, y, u, v).
2. Résoudre le système $(x', y', u', v') = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 7 Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas horizontal : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres à l'heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat, quelle est la plus haute de ces deux villes, et quelle est leur différence d'altitude ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres à l'heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les trois longueurs : de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est à plat.

Exercice 8 Soient a, b, et c trois nombres réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?
$$\mathcal{S}_{abc} : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array} \right.$$
2. Est-ce que le système $\mathcal{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

Exercice 9 Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\mathcal{S}_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array} \right.$$