Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Le but de cette feuille d'exercices est de se familiariser avec le crochet de champs de vecteurs et de déterminer les algèbres de Lie associées aux groupes de Lie classiques.

Exercice 1 *(Crochets de champs de vecteurs)*
On rappelle le **théorème de Cauchy-Lipschitz** : soit X un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \Phi(0,u) = u, \quad \forall u \in \mathcal{U} \\ \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} \Phi(t,u) = X(\Phi(t_0,u)) \end{cases}$$

admet une solution définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$. Deux solutions coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. Pour $u \in \mathcal{U}$, l'application $t \mapsto \Phi(t,u)$ définie sur un intervalle ouvert maximal $I_u \subset \mathbb{R}$ contenant 0 est appelée flot de X en $u \in \mathcal{U}$.

1. *Exemple pour $n = 2$:*
   (a) Soit X_1 le champ de vecteurs défini sur l'ouvert $\mathcal{O} =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par :
   $$X_1(x,y) = (1, 2\sqrt{y}),$$
   où $(x,y) \in \mathcal{O}$. Montrer que le flot de X est :
   $$\Phi_1(t,(x,y)) = (x+t, (\sqrt{y}+t)^2)$$
   et est defini sur l'ouvert $\{(t,(x,y)) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[\ , -x < t\}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{O}$.
   (b) Soit X_2 le champ de vecteurs défini sur $\mathcal{O}$ par :
   $$X_2(x,y) = (1,0).$$
   Quel est le flot Φ_2 de X_2 et son domaine de définition ?
   (c) Soit X_3 le champ de vecteurs défini sur $\mathcal{O}$ par :
   $$X_3(x,y) = (y,0).$$
   Quel est le flot Φ_3 de X_3 et son domaine de définition ?
   (d) Pour $i = 1,2,3$, on pose $\Phi_i^t(x,y) = \Phi_i(t,(x,y))$. Montrer que
   $$\Phi_2^s \circ \Phi_1^t(x,y) = \Phi_1^t \circ \Phi_2^s(x,y)$$
   en tous points où cette expression a un sens. On dit que les flots Φ_1 et Φ_2 commutent.
   (e) Que vaut $\Phi_3^s \circ \Phi_1^t(x,y) - \Phi_1^t \circ \Phi_3^s(x,y)$?
   (f) Calculer
   $$\frac{d^2}{dt\,ds}\Big|_{(t,s)=(0,0)} \Phi_3^s \circ \Phi_1^t(x,y) - \Phi_1^t \circ \Phi_3^s(x,y) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0} \frac{\Phi_3^s \circ \Phi_1^t(x,y) - \Phi_1^t \circ \Phi_3^s(x,y)}{st}.$$
2. *Flot, difféomorphisme et dérivée de Lie :*
   (a) Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et f un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur un ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$. On note $f_*(X)$ le champ de vecteurs sur $\mathcal{U}'$ défini par :
   $$f_*(X)(v) = D_{f^{-1}(v)}f\left(X\left(f^{-1}(v)\right)\right),$$
   où $D_{f^{-1}(v)}f$ désigne la différentielle de f au point $f^{-1}(v) \in \mathcal{U}$. Montrer que le flot de $f_*(X)$ est l'application $(t,v) \mapsto f \circ \Phi\left(t, f^{-1}(v)\right)$, où Φ est le flot de X.

(b) En déduire que le théorème de Cauchy-Lipschitz peut être transposé sans difficulté à une variété.

(c) Soient X_2 et X_2 deux champs de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. On note Φ_1^s et Φ_2^t leurs flots. La dérivée de Lie de X_2 le long de X_1, notée $\mathcal{L}_{X_1}(X_2)$, est le champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$ dont la valeur en $u \in \mathcal{U}$ est

$$\mathcal{L}_{X_1}(X_2)(u) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\Phi_1^{-t}\right)_* \left(X_2(\Phi_1^t(u))\right).$$

Montrer que

$$\mathcal{L}_{X_1}(X_2)(u) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0} \Phi_1^{-t}\left(\frac{\Phi_2^s \circ \Phi_1^t(x,y) - \Phi_1^t \circ \Phi_2^s(x,y)}{st}\right).$$

(d) Calculer $\mathcal{L}_{X_1}(X_2)$ et $\mathcal{L}_{X_1}(X_3)$ où X_1, X_2, X_3 sont les champs de vecteurs définis en 1.

3. *Dérivations :* On note $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ l'anneau des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, la somme et le produit de deux fonctions seront notés $+$ et $\times$ respectivement. On appelle dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ toute application

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$$

vérifiant, $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & D(f+\lambda g) = D(f) + \lambda D(g) \quad (\mathbb{R}\text{-linéarité}) \\ \text{(ii)} & D(f\times g) = D(f)\times g + f \times D(g) \quad (\text{règle de Leibniz}). \end{array}$$

(a) Montrer que, pour tout champ de vecteurs X sur $\mathcal{U}$, l'application

$$\begin{array}{rcccl} D_X & : & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \\ & & f & \longmapsto & Df(X) \ : (x,y) \mapsto D_{(x,y)}f(X(x,y)) \end{array}$$

est une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.

(b) Quelles sont les dérivations associées aux champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 définis en 1. ?

(c) Montrer que si D_1 et D_2 sont deux dérivations sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, alors l'application

$$\begin{array}{rcccl} [D_2, D_1] & : & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \\ & & f & \longmapsto & D_2 \circ D_1(f) - D_1 \circ D_2(f) \end{array}$$

est une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.

(d) Montrer l'identité de Jacobi :

$$[D_1,[D_2,D_3]] + [D_2,[D_3,D_1]] + [D_3,[D_1,D_2]] = 0.$$

(e) Soient Y et Z deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$:

$$Y(u) = (a_1(u), \ldots, a_n(u)) \quad \text{et} \quad Z(u) = (b_1(u), \ldots, b_n(u)).$$

Calculer $[D_Z, D_Y](f)$ et montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, noté $[Z,Y]$ et appelé crochet de Z et Y, tel que $[D_Z, D_Y] = D_{[Z,Y]}$.

(f) En déduire l'identité de Jacobi pour les champs de vecteurs.

(g) Calculer $[X_1, X_2]$ et $[X_1, X_3]$ où X_1, X_2, X_3 sont les champs de vecteurs définis en 1.

4. *Equivalence :* Montrer que $\mathcal{L}_{X_1}X_2 = [X_1, X_2]$ (cf Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1983), page 70.)

Exercice 2 *(Algèbres de Lie des groupes de Lie classiques)*

1. Quel est l'algèbre de Lie de $\mathrm{U}(n)$? Quelle est sa dimension ?
2. Quelle est l'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(n)$? Quelle est sa dimension ?
3. Quelle est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$? Quelle est sa dimension ?
4. Quelle est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$? Quelle est sa dimension ?