Application exponentielle

Questions de compréhension :

1. La réciproque du théorème de Von Neumann est-elle Vraie ou Fausse ? Autrement dit, les sous-groupes de Lie d'un groupe de Lie sont-ils nécessairement fermés ?
2. Quelle est la différentielle de la multiplication d'un groupe de Lie G en (e, e), où e est l'élément neutre de G ?

Exercice 1 *(Champs de vecteurs invariants sur le groupe de Heisenberg)*
Soit G le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

On munit G de la structure de variété induite par la bijection :

$$\begin{array}{cccc} f : & G & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & (x, y, z). \end{array}$$

En particulier, l'espace tangent $\mathfrak{g}$ de G en la matrice identité s'identifie à $T_{(0,0,0)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$, et une base de $\mathfrak{g}$ est donnée par les vecteurs :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire la loi de multiplication $\star$ que $\mathbb{R}^3$ hérite de son identification avec G.
2. Quelle est la différentielle de la translation à **gauche** par un élément $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^3, \star)$?
3. Quelle est la différentielle de la translation à **droite** par un élément $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^3, \star)$?
4. Quels sont les champs de vecteurs V_1, V_2, V_3 invariants à **gauche** sur $(\mathbb{R}^3, \star)$ dont les valeurs en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ respectivement ?
5. Quels sont les champs de vecteurs W_1, W_2, W_3 invariants à **droite** sur $(\mathbb{R}^3, \star)$ dont les valeurs en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ respectivement ?
6. Quelles sont les dérivations de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ associées à V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, et W_3 ?
7. Calculer les crochets des champs de vecteurs suivants : $[V_1, V_2]$, $[V_2, V_3]$ et $[V_3, V_1]$. En déduire l'expression du crochet de l'algèbre de Lie de $(\mathbb{R}^3, \star)$.
8. Vérifier que l'on obtient le crochet de Lie inverse quand on décide d'identifier l'algèbre de Lie de $(\mathbb{R}^3, \star)$ avec les champs de vecteurs invariants à droite.
9. Vérifier que la structure d'algèbre de Lie que $\mathfrak{g}$ hérite de son identification avec $T_{(0,0,0)}\mathbb{R}$ est donnée par le commutateur des matrices.

Exercice 2 *(Exemple de groupe de Lie non-linéaire par B. Keller)*
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes de Lie injectif du groupe de Lie

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & \overline{z} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \overline{z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right\}$$

dans un $GL(n, \mathbb{C})$, $n \geq 1$.

1. (a) Calculer le centre du groupe de Heisenberg G (cf exo 1), i.e. l'ensemble des matrices $g \in G$ telles que $gh = hg$ pour tout $h \in G$.
   (b) On note Γ le sous-groupe de G formé des matrices où $x = y = 0$ et $z \in \mathbb{Z}$. Montrer que Γ est un sous-groupe fermé distingué de G.
   (c) On considère le groupe de Lie quotient $H = G/\Gamma$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & \overline{z} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \overline{z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right\},$$

   qui est isomorphe, en tant que variété, au produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ (on identifie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à S^1 par $\overline{z} \mapsto e^{2i\pi z}$). Montrer que la projection canonique $G \to G/\Gamma$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de G et qu' elle induit un isomorphisme de $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ sur $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$.
   (d) Calculer $\exp_H(tZ)$.
2. Soient A, B, C trois matrices $n \times n$ à coefficients complexes telles que

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] = 0.$$

   On va montrer que la matrice C est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ telle que $C^m = 0$.
   (a) Montrer que C est nilpotente si et seulement si toutes ses valeurs propres sont nulles.
   (b) Soit λ une valeur propre de C et $V_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ l'espace propre correspondant. Comme A et B commutent avec C, l'espace propre V_λ est invariant sous A et B. Notons A', B' et C' les restrictions à la source et au but des trois applications A, B et C à V_λ. Montrer que $[A', B']$ est de trace nulle.
   (c) Montrer que l'équation $[A', B'] = C'$, implique $\lambda = 0$. Conclure.
3. Montrer que l'exponentielle $\exp : M(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ induit une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur celui des matrices unipotentes (i.e. des matrices g telles que $g-1$ est nilpotente), dont la bijection inverse est donnée par

$$g \mapsto \log(1 + (g-1)) = (g-1) - \frac{1}{2}(g-1)^2 + \dots.$$

4. Supposons qu'il existe un morphisme de groupes de Lie injectif $f : H \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$, pour un certain $n \geq 1$.
   (a) Montrer que la différentielle de f en l'élément neutre de H est injective.
   (b) Posons

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que ces trois éléments forment une base de $\mathfrak{h}$ et que

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

   (c) Notons A, B et C les images de X, Y et Z par $D_{e_H}(f)$. Quelles sont les relations de commutation vérifiées par A, B et C ?
   (d) En utilisant les question 2 et 3, en déduire que C est nilpotente et que la restriction de l'exponentielle de matrices

$$\exp \; : \; \mathbb{R} \cdot C \longrightarrow \exp(\mathbb{R} \cdot C)$$

   à la droite $\mathbb{R} \cdot C$ est bijective.
   (e) Montrer que les applications $f \circ \exp_H$ et $\exp_H$ restreintes à la droite $\mathbb{R} \cdot Z$ sont injectives.
   (f) En utilisant 1.d., montrer que l'on aboutit à une contradiction.