
Applications linéaires – Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

Le but de cette feuille d'exercices est de comprendre ce qu'est une application linéaire, et d'apprendre à calculer une base du noyau et de l'image d'une telle application.

Exercice 1 1. On munit \mathbb{R}^2 d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Montrer qu'une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

Exercice 2 Soit f la fonction de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + t, x + y + z + t, 2x + 2y + 2z + 2t).$$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
2. Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1, 0)$ et $\vec{c} = (0, 0, 1, -1)$ appartiennent à $\ker f$.
3. Vérifier que le vecteur $\vec{d} = (5, 5, 5, 10)$ appartient à $\text{Im} f$.

Exercice 3 Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z).$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f , noté $\ker f$.
(b) L'application f est-elle injective ?
4. (a) Donner le rang de f et une base de $\text{Im} f$.
(b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 4 1. Soit f une application linéaire surjective de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 . Quelle est la dimension du noyau de f ?

2. Soit g une application linéaire injective de \mathbb{R}^{26} dans \mathbb{R}^{100} . Quelle est la dimension de l'image de g ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre \mathbb{R}^{50} et \mathbb{R}^{72} ?

Exercice 5 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A .
2. Déterminer une base de l'image de A .

Exercice 6 Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de B .
2. Déterminer une base de l'image de B .

Exercice 7 Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de C .
2. Déterminer une base de l'image de C .