Université Lille I **feuille de TD n° 4**

Master 2 recherche A. B. Tumpach

Classes de similitude, classes de r-équivalence

Exercice 1 *(Décomposition de Dunford et réduite de Jordan)*

1. Quelle est la décomposition de Dunford de la matrice suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle est le tableau de Young de la partie nilpotente de A ?
3. Calculer l'exponentielle de A.

Exercice 2 *(Classes de conjugaison)*

1. Soient $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ deux matrices réelles conjuguées sous $GL(n, \mathbb{C})$: $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{C}),\ A = P\,B\,P^{-1}$. Montrer que A et B sont conjuguées sous $GL(n, \mathbb{R})$.
2. Soient $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ deux matrices réelles conjuguées sous $U(n)$. Montrer que A et B sont conjuguées sous $O(n, \mathbb{R})$.

Exercice 3 *(Structure de variété de G/H)*

Soit G un groupe de Lie de dimension finie et H un sous-groupe fermé de G. On va montrer que l'espace quotient G/H peut-être naturellement muni d'une structure de variété de dimension $\dim G - \dim H$. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H respectivement. Soit $\mathfrak{m}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} & \longrightarrow & G \\ & (X, Y) & \longmapsto & \exp_G(X)\exp_G(Y) \end{array}$$

On rappelle que Ψ est un difféomorphisme local et qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $e_G \in G$ tel que :

$$\Psi^{-1}(\mathcal{U} \cap H) = \Psi^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{h}.$$

(cf la démonstration du théorème de Von Neumann). Soit $\mathcal{V}_{\mathfrak{m}}$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}$ tel que

$$\exp_G(\mathcal{V}_{\mathfrak{m}}) \cdot \exp_G(-\mathcal{V}_{\mathfrak{m}}) \subset \mathcal{U},$$

et $\mathcal{V}_{\mathfrak{h}}$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}$ tel que $\mathcal{V}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{m}} \subset \Psi^{-1}(\mathcal{U})$.

1. Montrer que dans le voisinage $\Psi(\mathcal{V}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{m}})$ de e_G, toute classe modulo H rencontre $\exp_G(\mathcal{V}_{\mathfrak{m}})$ en un et un seul point.
2. On munit G/H de la topologie quotient et on note $\pi\ : G \to G/H$ la projection canonique. Soit $\mathcal{V}'_{\mathfrak{m}}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{m}$ dont l'adhérence est compacte et contenue dans $\mathcal{V}_{\mathfrak{m}}$. Montrer que l'application $\pi \circ \exp_G$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathcal{V}'_{\mathfrak{m}}}$ sur son image.
3. En déduire que

$$\begin{array}{cccc} \psi = \pi \circ \exp_G : & \mathcal{V}'_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \psi(\mathcal{V}'_{\mathfrak{m}}) \subset G/H \\ & X & \longmapsto & \exp_G(X) \cdot H \end{array}$$

   est un homéomorphisme.
4. Montrer que, pour tout $g_0 \in G$, les applications

$$\begin{array}{cccc} L_{g_0} : & G/H & \to & G/H \\ & gH & \mapsto & g_0 gH \end{array}$$

   sont des homéomorphismes.
5. On pose $\psi_g = L_g \circ \psi$. Montrer que $\mathcal{A} = \{\left((\psi_g(\mathcal{V}'_{\mathfrak{m}}), \psi_g^{-1}\right), g \in G\}$ est un atlas $\mathcal{C}^\infty$ de G/H.

Exercice 4 1. Montrer que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.

2. On appelle projecteur toute matrice P de $M(n, \mathbb{C})$ telle que $P^2 = P$. Montrer qu'un projecteur de rang r est conjugué à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que l'ensemble des projecteurs de rang r est un ensemble connexe de $M(n, \mathbb{C})$.

4. Montrer que l'ensemble des matrices complexes de taille $n \times n$ et de rang r est un ensemble connexe de $M(n, \mathbb{C})$.

Exercice 5 *(Ensemble des matrices réelles de rang r)*
Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et de rang r, noté $\mathcal{M}_r$, forme une sous-variété connexe de $M(n, \mathbb{R})$. On désigne par rg M le rang d'une matrice M : rg $M = \dim \operatorname{Im} M$.

1. (a) Montrer que
$$\mathcal{O}_p := \{M \in M(n, \mathbb{R}) \mid \text{rg } M \geq p\}$$
est un ouvert de $M(n, \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'intersection d'un ouvert et d'un fermé d'un espace topologique est localement compact.
   (c) En déduire que $\mathcal{M}_r = \mathcal{O}_r \cap (M(n, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{O}_{r+1})$ est une sous-variété de $M(n, \mathbb{R})$.
   (d) En considérent le stabilisateur de la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r est la matrice identité de taille $r \times r$, montrer que
$$\dim \mathcal{M}_r = r(2n - r).$$
2. (a) Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe topologique de G. On suppose que H et G/H sont connexes. En déduire que G est connexe. (On pourra montrer qu'une application continue $f : G \to \{0, 1\}$ est constante).
   (b) Montrer que $GL^+(n, \mathbb{R}) := \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det M > 0\}$ est localement compact, et est une réunion dénombrable de compacts.
   (c) On considère l'action naturelle de $GL^+(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Montrer que le stabilisateur de $\vec{e_1} = (1, 0, \cdots, 0)$ est un produit semi-direct de $\mathbb{R}^{n-1}$ avec $GL^+(n-1, \mathbb{R})$.
   (d) En déduire que $GL^+(n, \mathbb{R}) / \left(GL^+(n-1, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^{n-1}\right)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
   (e) Montrer par récurrence que $GL^+(n, \mathbb{R})$ est connexe.
   (f) En déduire que $\mathcal{M}_r$ est connexe.

Exercice 6 *(Matrices compagnons)*

On appelle matrice compagnon sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$, où $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon de taille $n \times n$.
2. Montrer que le polynôme minimal d'une matrice compagnon de taille $n \times n$ est de degré n.
3. Réciproquement, montrer que si le polynôme minimal d'une matrice $M \in M(n, \mathbb{K})$ est de degré n, il existe $x_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $\{x_0, A(x_0), \cdots, A^{n-1}(x_0)\}$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. En déduire que dans ce cas, M est conjuguée à une matrice compagnon.
4. On note $\mathcal{C}_\mathbb{K}$ l'ensemble des matrices conjuguées à une matrice compagnon, c'est-à-dire l'image de $GL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$ par l'application
$$\begin{array}{cccc} \Phi : & GL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & M(n, \mathbb{K}) \\ & (P, (a_0, \cdots, a_{n-1})) & \longmapsto & P \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{array}$$
Montrer que $\mathcal{C}_\mathbb{K}$ est un ouvert de $M(n, \mathbb{K})$.
5. Montrer que $\mathcal{C}_\mathbb{C}$ est connexe.
6. Montrer que si n est impair, $\mathcal{C}_\mathbb{R}$ est connexe.
7. Supposons que n est pair. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $J \in \Phi\left(GL^+(n, \mathbb{K}) \times K^n\right) \cap \Phi\left(GL^-(n, \mathbb{K}) \times K^n\right)$.
En déduire que pour n pair $\mathcal{C}_\mathbb{R}$ est également connexe.