Université Lille I **feuille de TD n° 5**
Master 2 recherche A. B. Tumpach

Décompositions des groupes de Lie

Le but de cette feuille d'exercices est d'établir certaines décompositions classiques des groupes de Lie.

Questions de compréhension :

1. À quoi correspond la décomposition polaire de $GL(1, \mathbb{C})$?
2. Montrer que lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble M, les stabilisateurs de deux points d'une même orbite sont deux sous-groupes conjugués de G.
3. Soit G un groupe de Lie. Montrer que la composante connexe G_0 de e_G est un sous-groupe fermé distingué de G.

Exercice 1 Montrer qu'une matrice symétrique à coefficents réels A se diagonalise dans une base orthonormée. (Pour trouver un vecteur propre, on pourra minimiser la forme quadratique $q : x \mapsto \langle A(x), x\rangle$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, où $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$).

Exercice 2 *(Décomposition de Cartan)*

1. En utilisant la décomposition polaire, montrer que toute matrice g de $GL(n, \mathbb{R})$ s'écrit comme produit $g = k_1\, a\, k_2$ où $k_1, k_2 \in O(n, \mathbb{R})$ et où a est une matrice diagonale à coefficients réels.
2. En considérant une matrice diagonale, montrer que cette décomposition n'est pas unique.
3. Montrer de même qu'une matrice h de $GL(n, \mathbb{C})$ s'écrit comme produit $h = k_1\, a\, k_2$ où $k_1, k_2 \in U(n)$ et où a est une matrice diagonale à coefficients complexes, mais que cette décomposition n'est pas unique.

Exercice 3 *(Décomposition d'Iwasawa)*
Le but de cet exercice est de montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ est homéomorphe au produit $K \times A \times N$, où $K = O(n, \mathbb{R})$, A est le sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ formé des matrices diagonales à coefficients réels strictement positifs, et où N est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1.

1. Soit $g \in GL(n, \mathbb{R})$. On note $e_1, \cdots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base $\{g^{-1}(e_i), i = 1, \cdots, n\}$, montrer qu'il existe une matrice triangulaire T à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $Tg^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.
2. Montrer que toute matrice triangulaire T à coefficients diagonaux strictement positifs s'écrit comme un produit $a\, n$, où $a \in A$ et $n \in N$.
3. En déduire que toute matrice g de $GL(n, \mathbb{R})$ s'écrit comme produit $g = k\, a\, n$ où $k \in O(n, \mathbb{R})$, $a \in A$, $n \in N$. Montrer que cette décomposition est unique.
4. Soit $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $GL(n, \mathbb{R})$ qui converge (pour la topologie de $M(n, \mathbb{R})$) vers une matrice $g \in GL(n, \mathbb{R})$ qui s'écrit $g = k\, a\, n$, avec $k \in O(n, \mathbb{R})$, $a \in A$, $n \in N$. On note $g_i = k_i a_i n_i$ les décompositions d'Iwasawa des éléments de la suite. Montrer que la suite $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $O(n, \mathbb{R})$ admet comme unique valeur d'adhérence la matrice $k \in O(n, \mathbb{R})$.
5. En déduire que l'application :
$$\begin{array}{ccll} GL(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & K \times A \times N & \\ g & \longmapsto & (k, a, n) & \text{tel que } g = k\, a\, n, \end{array}$$
est continue et réalise un homéomorphisme de $GL(n, \mathbb{R})$ sur le produit $K \times A \times N$.
6. Déterminer la décomposition d'Iwasawa de la matrice $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *(Décomposition de Bruhat)*
Le but de cet exercice est de montrer que $GL(n,\mathbb{R}) = \cup_{w\in\mathfrak{S}_n} N\,w\,B$, où w décrit l'ensemble des matrices de permutations $\mathfrak{S}_n$, N est le groupe des matrices triangulaires supérieures avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1, et où B est le groupe des matrices triangulaires supérieures.

1. Soit $g \in GL(n,\mathbb{R})$. Montrer qu'effectuer les opérations élémentaires suivantes sur la matrice g revient à multiplier g à droite par une matrice triangulaire supérieure :
   – multiplier une colonne de g par un coefficient non nul
   – ajouter à une colonne de g un multiple d'une autre colonne située à sa gauche.
2. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que le produit $g\,T := u$ vérifie les conditions suivantes :
   – chaque colonne de u se termine par un 1 (i.e. $\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \exists\, i_j \in \{1,\cdots,n\}$ tel que $u_{i_j\,j} = 1$ et $u_{k\,j} = 0$ pour tout $k > i_j$)
   – les coefficients à droite de chaque 1 sont nuls (i.e. $u_{i_j\,k} = 0$ pour tout $k > j$).
3. On rappelle qu'un matrice de permutation est une matrice dont chaque ligne et chaque colonne contient un unique coefficient non nul et égal à 1. Montrer qu'il existe une matrice de permutation w telle que le produit $u\,w^{-1} := n$ appartient à N.
4. En déduire que tout élément g de $GL(n,\mathbb{R})$ se factorise sous la forme $g = n\,w\,b$, où n appartient à l'ensemble N des matrices triangulaires supérieures avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1, w est une matrice de permutation, et b est une matrice triangulaire supérieure.
5. Montrer que la décomposition est unique à condition d'imposer que $n \in N \cap wN^T w^{-1}$, où N^T désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures avec tous les éléments diagonaux égaux à 1.
6. Déterminer la décomposition de Bruhat de la matrice $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.