Université Lille I **feuille de TD n° 6**
Master 2 recherche A. B. Tumpach

Connexité, simple connexité

Dans cette feuille d'exercices nous allons établir la simple connexité de certains groupes de Lie classiques et calculer le π_1 de certains autres...

Questions de compréhension :

1. Montrer que pour toute matrice $A \in M(n, \mathbb{C})$, $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\ A)$.
2. Montrer qu'une matrice qui commute avec son adjoint est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. Soit G un groupe de Lie. Montrer que la composante connexe G_0 de e_G est un sous-groupe fermé distingué de G.

Exercice 1 *(Rappel sur la connexité et la connexité par arc)*

1. On dit qu'un espace topologique M est *connexe*, s'il vérifie l'une des propriétés suivantes :
   (a) M n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints,
   (b) M n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints,
   (c) Les seuls ensembles ouverts et fermés de M sont M et l'ensemble vide,
   (d) Toute application continue de M dans $\{0, 1\}$ est constante.

   Montrer que ces quatre propriétés sont équivalentes.
2. Soit E un sous-ensemble d'un espace topologique M muni de la topologie induite. Montrer que si E est un espace topologique connexe, son adhérence dans M est un espace topologique connexe.
3. Un espace topologique M est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques de M peuvent être joints par un chemin contenu dans M. On dit qu'un espace topologique M est *localement connexe par arcs*, si tout point de M admet un voisinage ouvert connexe par arcs. Montrer qu'un espace topologique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs. (On pourra montrer que l'ensemble des points pouvant être joints à un point donné est à la fois ouvert et fermé).
4. Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.
5. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\{(x, \sin\frac{1}{x}), x \in]0, 1]\} \cup \{(0, t), t \in [-1, 1]\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 2 *(Connexité des groupes de Lie classiques)*

1. Soient $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$. Montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$ s'annule en un nombre fini de points. En déduire qu'il existe un chemin $z(t)$ dans $\mathbb{C}$, avec $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$, tel que $\det(z(t)A + (1 - z(t))B) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$. En conclure que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} SL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{C}) \\ (A, \lambda) & \longmapsto & A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$
est un homéomorphisme. En déduire que $SL(n, \mathbb{C})$ est connexe.
3. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} SL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & GL^+(n, \mathbb{R}) \\ (A, \lambda) & \longmapsto & A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$
est un homéomorphisme. En déduire que $SL(n, \mathbb{R})$ est connexe. (On rappelle que $GL^+(n, \mathbb{R})$ est connexe – cf feuille de TD 4, exo 5 question 2).

4. (a) Montrer que l'action naturelle de $U(n)$ sur $\mathbb{C}^n$ induit une action transitive sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2n-1} = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n, \|\vec{v}\| = 1\} \subset \mathbb{C}^n$. En déduire que $\mathbb{S}^{2n-1}$ est homéomorphe à $U(n)/U(n-1)$ et à $SU(n)/SU(n-1)$ $(n \geq 2)$.
   (b) Montrer par récurrence que $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes.
5. Montrer que $O(n, \mathbb{R})$ à deux composantes connexes homéomorphes à $SO(n, \mathbb{R})$.

Exercice 3 *(Simple-connexité des sphères)*

1. Soit $\gamma\ : [0,1] \to \mathbb{S}^n$, $\gamma(0) = \gamma(1)$ un lacet différentiable sur la sphère $\mathbb{S}^n$. On note γ' la dérivée de γ et $C = \sup\{\|\gamma'(t)\|, t \in [0,1]\}$. En découpant l'intervalle $[0,1]$ en intervalles de longueurs $\frac{1}{k}$, montrer que l'image de γ est recouverte par k boules de diamètre $C \times \frac{1}{k}$.
2. En déduire que γ ne peut pas être surjective.
3. En considérant la projection stéréographique par rapport à un point du complémentaire de l'image de γ, montrer que γ est homotope à un point.

Exercice 4 *(Décomposition polaire revisitée)*

1. Soit G un sous-groupe de Lie compact connexe de $GL(n, \mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\,\mathfrak{g}$, où $i\,\mathfrak{g} = \{iX \in M(n, \mathbb{C}), \text{tel que } X \in \mathfrak{g}\}$. Montrer que l'ensemble $G \times \exp(i\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé connexe de $GL(n, \mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
2. En utilisant la décomposition polaire, montrer que $SO(n, \mathbb{C}) := \{M \in M(3, \mathbb{C}), M^T M = M M^T = I, \det M = 1\}$ est homéomorphe au produit $SO(n, \mathbb{R}) \times \exp i\,\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.
3. En déduire que $SO(3, \mathbb{C})$ est connexe et $\pi_1(SO(3, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $SL(n, \mathbb{C})$ est homéomorphe au produit $SU(n) \times \exp(i\,\mathfrak{su}(n))$.
5. En déduire que $SL(2, \mathbb{C})$ est simplement connexe.
6. En considérant l'action par congruence de $SL(2, \mathbb{C})$ sur son algèbre de Lie
$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$
montrer que le revêtement universel de $SO(3, \mathbb{C})$ est $SL(2, \mathbb{C})$.

Exercice 5 *(Suite exacte de π_1)*

Supposons qu'un groupe de Lie G agisse transitivement et continûment sur un espace topologique $\mathcal{O}$ de telle sorte que le stabilisateur H d'un point de $\mathcal{O}$ soit connexe et que $\mathcal{O}$ soit homéomorphe au quotient G/H. On admet dans cet exercice qu'on a alors la suite exacte suivante :
$$\pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H) \to 0.$$

1. Montrer que si G/H est simplement connexe, alors $\pi_1(G)$ est un quotient de $\pi_1(H)$.
2. Montrer par récurrence que $SU(n)$ est simplement connexe.
3. En déduire que $SL(n, \mathbb{C})$ est simplement connexe.
4. Montrer que $U(n)$ est homéomorphe au produit $SU(n) \times S^1$.
5. En déduire que le groupe fondamental de $U(n)$ est $\mathbb{Z}$ et que le revêtement universel de $U(n)$ est $SU(n) \times \mathbb{R}$.
6. En utilisant la décomposition polaire, montrer que $\pi_1(GL(n, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.