Université Lille I — Année 2009

PC $1^{\text{ère}}$ année — **feuille d'exercices n° 6**

Vecteurs propres et valeurs propres

Le but de cette feuille d'exercices est d'apprendre à calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et à appliquer un changement de base à la matrice d'un endomorphisme.

Exercice 1 1. (a) Soit $f\ :\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}.$$

(b) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

(d) Montrer que le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

(e) Calculer graphiquement l'image du vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat par le calcul.

(f) Montrer que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

(g) Quelle est la matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$? On la notera D.

(h) Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur $\vec{v}_1$ et dont la deuxième colonne est le vecteur $\vec{v}_2$. Calculer P^{-1}.

(i) Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?

(j) Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Même exercice avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

Exercice 4 Trouver une matrice carrée inversible P telle que $B = PAP^{-1}$ soit diagonale, et écrire la matrice B obtenue, pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (DS mai 2008) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
   (b) En déduire que l'on peut diagonaliser A.
2. (a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vecteurs propres tels que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit
   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
   (b) Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; quelle relation lie les matrices A, P, P^{-1} et D ?
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Après avoir donné D^n, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (DS mai 2008) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. (a) Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.
   (b) A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaliser A.

Exercice 7 Soit A une matrice carrée. La *trace* de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme des coefficients diagonaux de A. En utilisant le polynôme caractéristique de A, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ quelques que soient les matrices carrées A et B de même taille.

Exercice 8 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$

A quelles conditions les inconnue doivent-elles satisfaire pour que cette matrice soit diagonalisable ? Ces conditions étant remplies, fournir une base de vecteurs propres pour A.