Université Lille I — Année 2009

PC $1^{\text{ère}}$ année — **feuille d'exercices n° 7**

Révisions

Exercice 1 1. Résoudre de 4 manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (a+1)x & + & (a-1)y & = & 1 \\ (a-1)x & + & (a+1)y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Résoudre le système suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} 2x & + & y & + & z & - & 2u & + & 3v & - & w & = 1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & - & 3u & + & 5v & - & 3w & = 4 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 2u & + & 4v & - & 4w & = 6 \\ x & + & y & + & z & - & u & + & 2v & - & 2w & = 3 \\ 3x & & & & & - & 3u & + & 3v & + & 3w & = -6 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Pour chaque couple de matrices (A_i, b_i), $1 \leq i \leq 5$, ci-dessous

1. donner la nature de l'ensemble des solutions du système $A_iX = b_i$;
2. donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de $A_iX = b_i$;
3. donner une base de l'image et une base du noyau de A_i.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Exercice 4 Calculer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+y+z, 2x+y+z, 2x+2y+z, y+z) \end{array}$$

Quel est le rang de f ?

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = AC$. La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices F de taille $(3, 3)$ telles que $AF = 0$, (où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

Exercice 6 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 7 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Exercice 8 Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 On désigne par $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. À une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$\begin{array}{cccc} u_\sigma : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Soit $\tau = (ij)$ une transposition. Écrire la matrice de u_τ dans la base canonique. Montrer que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Montrer que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma \circ \sigma'}$.
3. En déduire que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ où ε désigne la signature.

Exercice 10 1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.