
Structure d'espace vectoriel

Le but de cette feuille d'exercices est de donner des exemples d'espaces vectoriels, et d'apprendre à tester l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs.

Exercice 1 1. En utilisant les opérations d'addition $+$ et de multiplication \cdot de deux nombres, définir, pour chaque ensemble E de la liste ci-dessous :

- une addition $\oplus : E \times E \rightarrow E$;
- une multiplication par un nombre réel $\odot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$.

- (a) $E = \mathbb{R}^n$;
- (b) $E =$ l'ensemble des trajectoires d'une particule ponctuelle dans l'espace \mathbb{R}^3 ;
- (c) $E =$ l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathcal{S}_1 : x - 2y + 3z = 0$;
- (d) $E =$ l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ du système d'équations $\mathcal{S}_2 : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$;
- (e) $E =$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$;
- (f) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que

$$y''(x) \sin x + x^3 y'(x) + y(x) \log x = 0, \quad \forall x > 0 ;$$

- (g) $E =$ l'ensemble des fonctions $\Psi(t, x)$, à valeurs complexes, solutions de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t, x) + x^2 \Psi(t, x)$$

où \hbar et m sont des constantes ;

- (h) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ;
- (i) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels ;
- (j) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 ;
- (k) $E =$ l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels divisibles par $(x - 1)$;
- (l) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles ;
- (m) $E =$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles et d'intégrale nulle ;
- (n) $E =$ l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0, 1[$ à valeurs réelles ;
- (o) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui s'annulent en $0 \in \mathbb{R}$.
- (p) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$;

2. Pour les opérations d'addition \oplus construites, montrer que E possède un élément neutre (terme à définir), et que chaque élément de E possède un inverse.

Exercice 2 Qu'est-ce qui empêche de définir les mêmes opérations que dans l'exercice précédent sur les ensembles suivants ?

- (a) $E =$ l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathcal{S}_3 : x - 2y + 3z = 3$;
- (b) $E =$ l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que $y''(x) \sin x + x^3 y^2(x) + y(x) \log x = 0, \forall x > 0$;
- (c) $E = \mathbb{N}$;
- (d) $E = \mathbb{Z}$;
- (e) $E = \mathbb{R}^+$;

- (f) $E = \mathbb{Q}^n$;
- (g) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres positifs ;
- (h) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui prennent la valeur 1 en 0 ;
- (i) $E =$ l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$;

Exercice 3 Soient dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec \vec{v}_1 et \vec{v}_3 , puis avec \vec{v}_2 et \vec{v}_3 .
2. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ?

Exercice 4 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, 2)$ et $\vec{v}_3 = (3, 7, 1)$ dans \mathbb{R}^3 .
2. $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ et $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ dans \mathbb{R}^3 .
3. $\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v}_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^5 .
4. $\vec{v}_1 = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $\vec{v}_3 = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans \mathbb{R}^6 .
5. $\vec{v}_1 = (2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ et $\vec{v}_3 = (1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans \mathbb{R}^6 .

Exercice 5 On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de \mathbb{R}^n .

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?