Notations et préliminaires

Tous les corps figurant dans le problème sont supposés commutatifs.

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels
- $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls
- Pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$, l'ensemble $[\![a, b]\!]$ désigne $[a, b] \cap \mathbf{N}$
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels
- $\mathbf{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls
- $\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs
- $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
- $\mathbf{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls
- $\mathbf{K}$ étant un corps, on note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, pour tout nombre entier naturel n
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $GL_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{K})$. Si $A \in GL_n(\mathbf{K})$, on note A^{-1} son inverse
- On dira que deux sous-espaces vectoriels V et W de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{K})$ sont **conjugués** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$W = P^{-1}VP = \{P^{-1}MP \, ; M \in V\}.$$

- I_n désigne l'élément unité de $M_n(\mathbf{K})$.
- Pour A dans $M_n(\mathbf{K})$ on désigne par ${}^tA$ la transposée de A, tr$A$ la trace de A, det$A$ le déterminant de A et P_A son polynôme caractéristique sur $\mathbf{K}$ c'est-à-dire $P_A(X) = \det(A - XI_n)$
- Pour E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et Id_E l'application identité sur E.
- Si u est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on pose $Sp(u)$ le spectre de u, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de u.
- Pour u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et pour $\lambda \in Sp(u)$ on pose $E_\lambda(u) = \text{Ker } (u - \lambda Id_E)$ le sous-espace propre de u associé à λ.

Objet du problème

Dans ce problème, on se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{K})$ constitués de matrices diagonalisables.
Plus précisément, si n est un entier $\geqslant 1$ et $\mathbf{K}$ un corps, on note $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$ l'affirmation suivante :
- Pour toutes matrices A et B diagonalisables dans $M_n(\mathbf{K})$, la propriété

  (a) A et B commutent

  est équivalente à la propriété

  (b) Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{K})$.

L'un des objectifs de ce problème est de montrer que cette affirmation est vraie dans le cas complexe c'est-à-dire que $\mathbf{MT}(n, \mathbf{C})$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, qui est un résultat dû à Motzkin-Taussky, 1952.

Dans toute la suite, lorsqu'il sera demandé d'étudier l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$, il faudra examiner successivement si les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (a)$ sont vraies.

Les parties **I, II** et **III** peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

I-A : Le sens direct et le cas $n = 2$

1. Soit $\mathbf{K}$ un corps et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   On considère u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u c'est-à-dire que si F est un sous-espace propre de v, on a $u(F) \subset F$.
   (b) Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
   (c) En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans E pour les endomorphismes u et v, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de u et de v.
2. Plus généralement, on considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E.
   On suppose en outre que ces endomorphismes commutent deux à deux :
   $$(\forall\, (i,j) \in I^2), \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   Montrer l'existence d'une base commune de réduction dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ c'est-à-dire une base $\mathcal{B}$ de E qui est une base de vecteurs propres pour chaque endomorphisme u_i, $i \in I$.
   (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E, en étudiant à part le cas où $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'homothéties.)
3. Montrer que l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout corps $\mathbf{K}$.
4. Étudier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{R})$.
5. On étudie l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.
   Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.
   (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où B est une matrice diagonale de $M_2(\mathbf{C})$ avec au moins une valeur propre nulle.
   (b) En supposant que B est une matrice diagonale non nulle avec une valeur propre nulle, démontrer l'existence d'un nombre complexe λ_0 tel que $A + \lambda_0 B$ ait une valeur propre double.
   (c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$ est vraie.
6. On suppose ici $\mathbf{K} = \mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où p est un nombre premier et n un nombre entier $\geqslant 1$.
   (a) Montrer que $A \in M_n(\mathbf{F}_p)$ est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.
   (b) Démontrer l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{F}_2)$.
   (c) Démontrer l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{F}_p)$, dans le cas $p \geqslant 3$.
   (*Indication* : on pourra suivre le même plan que dans le cas complexe rencontré à la question **I-A-5**)

I-B : Application de la réduction simultanée

1. (a) On suppose ici que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.
   On considère un sous-groupe multiplicatif fini G de $GL_n(\mathbf{K})$ où n est un entier $\geqslant 1$.
   On suppose que :
   $$(\forall\, M \in G), \quad M^2 = I_n.$$
   Montrer que G est abélien de cardinal inférieur ou égal à 2^n.
   (b) En déduire que pour tout $(n,m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbf{K})$ et $GL_m(\mathbf{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

2. Dans cette question, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et n est un nombre entier $\geqslant 1$.
On considère A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{C})$ et on introduit l'endomorphisme de $M_n(\mathbf{C})$

$$\Phi_{A,B} : M \mapsto AM + MB.$$

   (a) En supposant que A est diagonalisable et que $B = 0$, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
   (b) En supposant A et B diagonalisables, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
   (c) Démontrer la réciproque, c'est-à-dire que si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, A et B le sont.
   (*Indication* : On pourra utiliser la décomposition de Jordan-Dunford de A et B)
   (d) Lorsque A et B sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de ceux de A et de ${}^tB$.

3. Dans cette question, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et on note $S_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $M_2(\mathbf{R})$. Soit V un hyperplan vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$ constitué de matrices diagonalisables sur $\mathbf{R}$.
On se propose de montrer que V est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que V contient la matrice I_2.
   (b) Montrer que V est conjugué au sous-espace vectoriel engendré par (I_2, A, B) avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   où ω est un nombre réel non nul.
   (c) En déduire le résultat.

4. Montrer que tout espace vectoriel formé de matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbf{R})$.

Partie II : Le cas $n = 3$

On suppose que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle. On **rappelle** les définitions suivantes :
- Pour les polynômes de $\mathbf{K}[X]$

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

où m et n sont deux entiers $\geqslant 1$, on définit le **résultant** de P et Q par le déterminant de taille $m + n$.

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots & b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_m & \vdots & & \ddots & b_n \\ \vdots & & & a_{m-1} & \vdots & & & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0 & & & \vdots & b_0 & & & \vdots \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n \text{ colonnes}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m \text{ colonnes}}$$

- Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ de coefficient dominant a_n, on définit le **discriminant** de P par

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \; R(P, P').$$

1. On considère α, β et γ trois scalaires de $\mathbf{K}$. Montrer que le discriminant du polynôme

$$P = -X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

est

$$-27\,\gamma^2 - 18\,\gamma\,\alpha\,\beta + \alpha^2\beta^2 - 4\,\alpha^3\gamma + 4\,\beta^3.$$

2. On pose dans $M_3(\mathbf{K})$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose s distinct de 0 et 1. Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de $M + \lambda N$ est un polynôme de degré six en λ dont le coefficient dominant est $(s(1-s))^2$.

3. On pose dans $M_3(\mathbf{K})$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note

$$P_B = -X^3 + aX^2 + bX + c.$$

   (a) Montrer que si $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$, on a :

$$(\forall\, \lambda \in \mathbf{K}), \quad P_{B+\lambda Q} = -X^3 + (a+\lambda)\, X^2 + (b - (b_1 + b_5)\,\lambda)\, X + c.$$

   (b) Montrer alors que si en plus $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ est un polynôme de degré quatre en λ et déterminer son coefficient dominant.

4. Ici $\mathbf{K} = \mathbf{C}$; on se propose de démontrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ de l'affirmation $\mathbf{MT}(3, \mathbf{C})$.
Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(3, \mathbf{C})$; on note $\mathscr{F}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré dans $M_3(\mathbf{C})$ par I_3, A et B.

   (a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$ et que si la dimension de $\mathscr{F}$ est strictement inférieure à 3, les matrices A et B commutent.

   (b) On suppose que la dimension de $\mathscr{F}$ est égale à 3. Montrer que l'on peut se ramener par conjugaison au cas où $A =$ Diag$(0, 0, 1)$ et B est un projecteur de rang 1.

   (c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ de l'affirmation $\mathbf{MT}(3, \mathbf{C})$ est vraie.

Partie III : Le cas général dans C

III-A : Bases holomorphes

1. Soit Ω_0 un disque ouvert de $\mathbf{C}$ contenant l'origine ; on considère une application holomorphe M de Ω_0 dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire telle que chaque coefficient m_{ij} de M définisse une fonction holomorphe de Ω_0 dans $\mathbf{C}$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Pour tout $z \in \Omega_0 \backslash \{0\}$, on note $V(z)$ le noyau de la matrice $M(z)$.
Démontrer l'existence d'un réel $\rho > 0$ et d'un entier $m \geqslant 0$ tels que
$$(\forall\, z \in \Omega_0), \quad (0 < |z| < \rho) \Longrightarrow (\dim V(z) = m).$$
(*Indication* : on pourra considérer les mineurs de $M(z)$.)

On suppose $m \geqslant 1$ dans la suite.
2. Sous les hypothèses ci-dessus et avec les mêmes notations, démontrer l'existence d'un nombre réel $r > 0$ et de m fonctions $\psi_1, \cdots, \psi_m$, holomorphes sur $D_r = \{z \in \Omega_0 \; ; |z| < r\}$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, telles que pour tout $z \in D_r \backslash \{0\}$, les vecteurs $\psi_1(z), \cdots, \psi_m(z)$ engendrent $V(z)$ et $\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0)$ sont tous non nuls.
(*Indication* : on pourra commencer par trouver des vecteurs $\tilde{\psi}_1(z), \cdots, \tilde{\psi}_m(z)$ méromorphes en z, qui engendrent $V(z)$.)
3. Toujours avec les mêmes notations, notons Z^* l'ensemble des couples $(z, \psi) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}^n$ tels que $z \neq 0$ et $\psi \in V(z)$, Z l'adhérence de Z^* dans $\Omega_0 \times \mathbf{C}^n$ et $V(0)$ (qui n'a pas encore été défini) le sous-ensemble de $\mathbf{C}^n$ tel que
$$\{0\} \times V(0) = Z \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n).$$
   (a) On suppose que la famille $(\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0))$ est libre. Démontrer que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.
   (b) Montrer qu'il existe une famille $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$, comme à la question **III-A-2** telle que la famille $(\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0))$ soit libre et en déduire que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.
   (*Indication* : partant d'une famille quelconque $(\phi_1, \cdots, \phi_m)$ vérifiant **III-A-2**, on pourra construire des familles $(\psi_1, \cdots, \psi_k, \phi_{k+1}, \cdots, \phi_m)$ par récurrence sur k.)
4. On considère une application holomorphe N d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ dans $M_n(\mathbf{C})$, un point μ_0 de $\mathbf{C}$ et un cercle Γ centré en μ_0, orienté dans le sens direct.
On suppose que pour tout $\lambda \in U$, la matrice $N(\lambda)$ est diagonalisable, que :
$$(\forall\, \lambda \in U), (\forall\, \mu \in \Gamma), \quad N(\lambda) - \mu I_n \in GL_n(\mathbf{C}),$$
et on note $R(\lambda, \mu) = (N(\lambda) - \mu I_n)^{-1}$.
   (a) Démontrer que la formule suivante
   $$\Pi(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma R(\lambda, \mu)\; d\mu$$
   définit une application holomorphe Π de U dans $M_n(\mathbf{C})$.
   (b) Soit λ_0 un point de U ; on suppose que μ_0 est l'unique valeur propre de $N(\lambda_0)$ entourée par le cercle Γ. Démontrer que $\Pi(\lambda_0)$ est la projection sur $E_{\mu_0}(N(\lambda_0))$, le sous-espace propre de $N(\lambda_0)$ associé à μ_0, parallèlement à la somme des autres sous espaces propres de $N(\lambda_0)$.
5. Démontrer que pour tout $\lambda \in U$, la matrice $\Pi(\lambda)$ est un projecteur, somme de projecteurs sur des sous-espaces propres de $N(\lambda)$ associés à des valeurs propres entourées par Γ.

Partie III-B : Courbes spectrales

Dans cette partie le corps de base est $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ désigne le disque ouvert unité $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}\,;|z| < 1\}$. Soit A et B deux matrices dans $M_n(\mathbf{C})$, pour $n \in \mathbf{N}^*$; on pose :

$$(\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2), \quad P(\lambda, \mu) = P_{A+\lambda B}(\mu) = \det(A + \lambda B - \mu I_n).$$

Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, le polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ sera noté P_λ.
On définit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2\,; P(\lambda, \mu) = 0\}.$$

On appelle **multiplicité** (dans $\mathcal{C}$) d'un point $x = (\lambda, \mu)$ de $\mathcal{C}$, la multiplicité de la racine μ du polynôme P_λ, notée $d(x)$.
Nous **admettrons** le théorème suivant qui permet de paramétrer localement l'ensemble $\mathcal{C}$ par des injections holomorphes de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}^2$:

Quelque soit $x_0 = (\lambda_0, \mu_0) \in \mathcal{C}$, il existe $l \in \mathbf{N}^*$ et deux familles finies d'applications holomorphes de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}$, $(f_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant l}$ et $(g_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant l}$, qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $(\forall\,\alpha \in [\![1, l]\!]), \quad f_\alpha(0) = \lambda_0 \;\text{ et }\; g_\alpha(0) = \mu_0$

(ii) $(\forall\,z \in \mathbf{D}), (\forall\,\alpha \in [\![1, l]\!]), \quad (f_\alpha(z), g_\alpha(z)) \in \mathcal{C}$

(iii) $(\exists \eta > 0), (\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}),$
$(|\lambda - \lambda_0| \leqslant \eta, |\mu - \mu_0| \leqslant \eta) \Longrightarrow \Big((\exists \alpha \in [\![1, l]\!]), (\exists z \in \mathbf{D}), \;\; \lambda = f_\alpha(z) \;\text{ et }\; \mu = g_\alpha(z)\Big)$

(iv) $(\forall\,\alpha \in [\![1, l]\!]), (\forall\,(z, w) \in \mathbf{D}^2), \quad (f_\alpha(z) = f_\alpha(w), g_\alpha(z) = g_\alpha(w)) \Longrightarrow (z = w)$

(v) $(\forall\,(\alpha, \beta) \in [\![1, l]\!]^2), (\alpha \neq \beta), \big(\forall\,(z, w) \in (\mathbf{D}\backslash\{0\})^2\big), \quad (f_\alpha(z), g_\alpha(z)) \neq (f_\beta(w), g_\beta(w))$

(vi) $(\forall\,z \in \mathbf{D}\backslash\{0\}), (\forall\,\alpha \in [\![1, l]\!]), \quad f'_\alpha(z) \neq 0.$

Nous noterons $F_\alpha = (f_\alpha, g_\alpha)$ les applications associées de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}^2$, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.

Remarque : la condition (ii) signifie que $F_\alpha(\mathbf{D}) \subset \mathcal{C}$, (iii) que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{1 \leqslant \alpha \leqslant l} F_\alpha(\mathbf{D})$ contient un voisinage de x_0 dans $\mathcal{C}$, (iv) que chaque F_α est injective et (v) que $(F_\alpha(\mathbf{D}\backslash\{0\}))_{1 \leqslant \alpha \leqslant l}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints. La condition (vi) est particulière à notre situation où chaque polynôme P_λ est de degré n en μ, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Pour $\alpha \in [\![1, l]\!]$, l'ensemble $F_\alpha(\mathbf{D})$ s'appelle une **branche locale** de $\mathcal{C}$ en x_0.
Nous **admettrons** que la multiplicité dans $\mathcal{C}$ est constante dans une branche épointée, c'est-à-dire que $d(x)$ ne dépend pas de x si $x \neq x_0$ et $x \in F_\alpha(\mathbf{D})$; on la notera d_α, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.
On appellera **ramification** e_α d'une branche $F_\alpha(\mathbf{D})$ en x_0 l'ordre du zéro 0 de $f_\alpha - \lambda_0$, qui existe puisque f_α est non constante ; nous **admettrons** alors que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{\lambda_0\}$ suffisamment proche de λ_0, le nombre de points $x = (\lambda, \mu) \in F_\alpha(\mathbf{D})$ est exactement e_α, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.
Enfin, nous **supposerons** que pour $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ fixé, si μ_0 et μ'_0 sont deux racines distinctes de P_{λ_0}, les branches locales de $\mathcal{C}$ en $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ sont disjointes des branches locales de $\mathcal{C}$ en $x'_0 = (\lambda_0, \mu'_0)$.

1. Soit $\big(F_\alpha(\mathbf{D})\big)_{\alpha \in [\![1, l]\!]}$ la famille de branches locales de $\mathcal{C}$ en un point $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ de $\mathcal{C}$.
   Démontrer que la multiplicité de x_0 dans $\mathcal{C}$ vérifie

$$d(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{l} e_\alpha d_\alpha.$$

2. On suppose jusqu'à la fin du problème que $A + \lambda B$ est diagonalisable, pour λ dans $\mathbf{C}$.
   Soit $(F_\alpha(\mathbf{D}))_{\alpha \in [\![1, l]\!]}$ la famille de branches locales de $\mathcal{C}$ en $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ et z un point de $\mathbf{D}\backslash\{0\}$.
   On définit l'espace vectoriel, pour $\alpha \in [\![1, l]\!]$

$$V_\alpha(z) = \{\psi \in \mathbf{C}^n\,; (A + f_\alpha(z)B)\psi = g_\alpha(z)\psi\},$$

et l'espace vectoriel associé $V_\alpha(0)$ comme en **III-A-3**.
Nous **admettons** la relation suivante :

$$E_{\mu_0}(A+\lambda_0 B) = \sum_{\alpha=1}^{l} V_\alpha(0).$$

Montrer alors que la ramification e_α de $F_\alpha(\mathbf{D})$ est égale à 1, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.

3. (a) Établir l'existence de n fonctions entières $\mu_i : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $\mathcal{C}$ coïncide avec la réunion des graphes de $\mu_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
   (b) Démontrer l'existence de nombres complexes $a_i, b_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, tels que

$$(\forall\, i \in [\![1, n]\!]), (\forall\, \lambda \in \mathbf{C}), \quad \mu_i(\lambda) = a_i + \lambda b_i.$$

4. Notation : pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, $\Gamma_i(\lambda, r)$ désigne le cercle de centre $\mu_i(\lambda)$ et de rayon r.
   (a) Démontrer l'existence de réels $\rho > 0$ et $\Lambda > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $r > 0$

$$(0 < r < \rho) \text{ et } (|\lambda| > \Lambda) \Longrightarrow \ (\forall\, i \in [\![1, n]\!]), (\forall\, \mu \in \Gamma_i(\lambda, r)),\ A + \lambda B - \mu I_n \text{ inversible.}$$

   (b) On note $R(\lambda, \mu)$ l'inverse de $A + \lambda B - \mu I_n$ lorsqu'il existe et on fixe $0 < r < \rho$.
   Démontrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la formule

$$\Pi_{j,r}(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_j(\lambda, r)} R(\lambda, \mu)\, d\mu.$$

   définit une fonction holomorphe de l'ouvert $U_\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{C} \,;\, |\lambda| > \Lambda\}$ dans $M_n(\mathbf{C})$.
   (c) Démontrer que, si en plus B est diagonalisable, chaque $\Pi_{j,r}(\lambda)$ admet une limite dans $M_n(\mathbf{C})$ lorsque $|\lambda|$ tend vers l'infini, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
5. On considère A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$. On suppose que $A + \lambda B$ est diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Démontrer que A et B commutent.