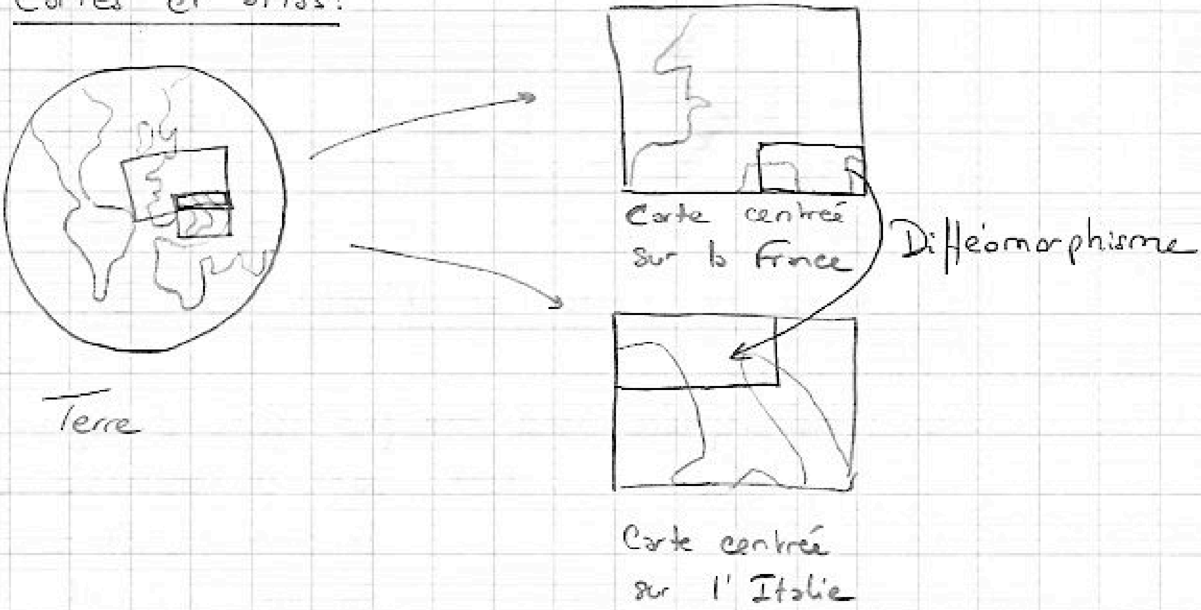
Chapitre I : Définitions et exemples de Groupes de Lie

1. Introduction des groupes de lie classiques

cf liste

2. Variétés et sous-variétés:

a. Cartes et atlas:



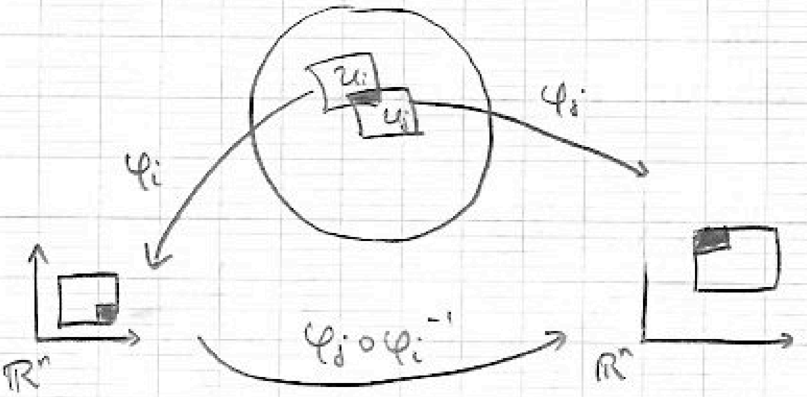
Déf: Une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ sur un espace topologique Ω est la donnée d'un ouvert $\mathcal{U}$ de Ω et d'un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Déf: Un atlas sur un espace topologique Ω est la donnée d'un ensemble de cartes $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telles que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = \Omega$.

Déf: On dit qu'un atlas sur un espace topologique Ω est de classe C^k si les changements de carte sont des applications de classe C^k entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. C'est-à-dire :

l'atlas $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de M est C^k si et seulement si : $\forall (\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ et $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)$ tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ on a :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \text{ de classe } C^k$$



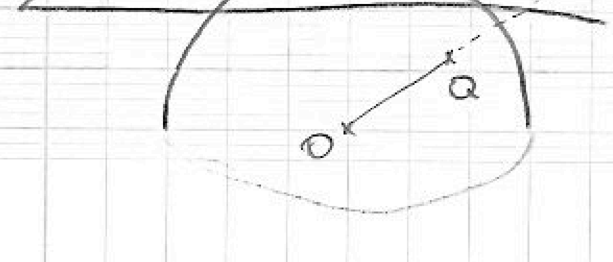
Exemples de cartes et d'atlas sur S^2 :

- φ_1 : hémisphère nord $\longrightarrow$ plan affine d'équation $z = 1$ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^2$

  Q $\longmapsto$ point d'intersection de la droite (OQ) avec le plan $\{z=1\}$ $\longrightarrow$ projection sur les 2 premières coordonnées

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) \longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

$$\varphi_1^{-1} : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(u, v)}} \longmapsto \underset{S^2}{\underset{\cap}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right)}}$$

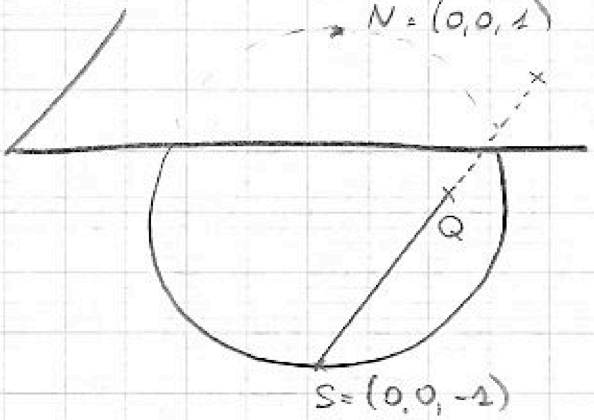


- $\varphi_2 : S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow$ Plan affine d'équation $z = 1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

  $Q \longmapsto$ Point d'intersection de la droite (SQ) avec le plan $\{z=1\}$ $\longrightarrow$ projection sur les 2 premières Coord.

  $$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{2x}{z+1}, \frac{2y}{z+1}, 1\right) \longmapsto \left(\frac{2x}{z+1}, \frac{2y}{z+1}\right)$$

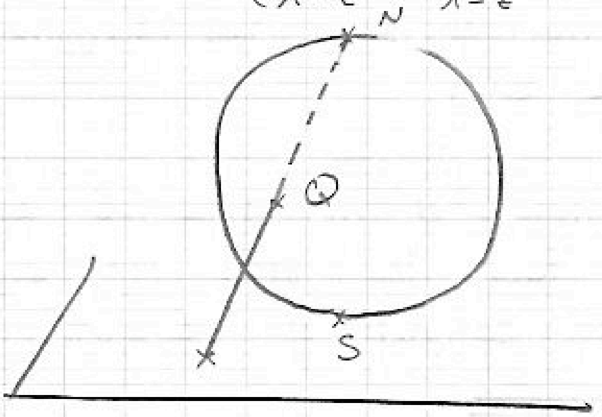
  $$\varphi_2^{-1} : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(u, v)}} \longmapsto \left(\frac{4u}{4+u^2+v^2}, \frac{4v}{4+u^2+v^2}, \frac{4-u^2-v^2}{4+u^2+v^2}\right) \in S^2$$



- $\varphi_3 : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow$ Plan affine d'équation $z = -1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

  $Q \longmapsto$ Point d'intersection de la droite (NQ) avec $\{z = -1\}$ $\longrightarrow$ projection

  $$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, 1\right) \longmapsto \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}\right)$$



$$\varphi_3^{-1} : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(u, v)}} \longmapsto \left(\frac{4u}{4+u^2+v^2}, \frac{4v}{4+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-4}{4+u^2+v^2}\right) \in S^2$$

$\Longrightarrow$ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des cartes de S^2 lorsque l'on munit S^2 de la topologie induite par $\mathbb{R}^3$.

Rappel: Soit N un sous-ensemble d'un espace topologique M et $i : N \hookrightarrow M$ l'injection canonique. Les ouverts de N pour la topologie induite par M sont les ensembles de la forme $N \cap \Theta = i^{-1}(\Theta)$ où Θ est un ouvert de M. Une application $f : E \to N$ est continue pour la topologie induite ssi

$$i \circ f : \underbrace{E \xrightarrow{f} N \overset{i}{\hookrightarrow} M}_{i \circ f}$$

et continue.

Un atlas de S^2 de classe C^∞ est donnée par les deux cartes $(S^2 \setminus \{S\}, \varphi_2)$ et $(S^2 \setminus \{N\}, \varphi_3)$ car

1) $S^2 \setminus \{S\} \cup S^2 \setminus \{N\} = S^2$

2)
$$\begin{array}{cccc} \varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} : & \varphi_2(S^2 \setminus \{N, S\}) & \longrightarrow & \varphi_3(S^2 \setminus \{N, S\}) \\ & \| & & \| \\ & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ & (u, v) & \longmapsto & \left(\frac{4u}{u^2+v^2}, \frac{4v}{u^2+v^2} \right) \end{array}$$

est de classe C^∞.

Déf: Deux atlas C^k sur un espace topologique M sont dits <u>C^k-équivalents</u> si leur réunion et un atlas C^k (i.e. si tous les changements de cartes sont de classe C^k).

Déf: Le <u>complété C^k</u> d'un altlas $\mathcal{A}$ est l'atlas $\mathcal{A}^c$ réunion de tous les atlas C^k-équivalents à $\mathcal{A}$. Un atlas est complet si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c$.

Exemple: La carte (hémisphère nord, φ_1) appartient au complété C^k de l'atlas $(S^2 \setminus \{S\}, \varphi_2) \cup (S^2 \setminus \{N\}, \varphi_3)$.

b. Variétés :

Déf : Une variété de classe C^k $(k \geq 0)$ est un espace topologique séparé muni d'un atlas (complet) de classe C^k.

Rque : 1) Deux atlas C^k-équivalents définissent la même structure de variété (ils sont tous les deux contenu dans le même atlas C^k complet).

2) Selon le cadre de travail, les auteurs, etc...
on peut être amené à remplacer
"espace topologique séparé" par
"ensemble"
"espace topo. séparé à base dénombrable" = "Hausdorff second-countable"

"esp. topo séparé paracompact" = "Hausdorff paracompact"

...

séparé : 2 pts ≠ peuvent être séparé par des ouverts
paracompact : ∀ recouvrement ouvert possède raffinement loc. fini
à base dénombrable : à base dénombrable d'ouverts

3) Variété = manifold
≠
variété algébrique = variety

Exemples de variétés C^∞ :

- tout ouvert de $\mathbb{R}^n$
- tout espace topologique séparé muni d'une seule carte est une variété C^∞. Ex : 
- S^n (voir exo 2)
- $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$ (voir exo 2)
- $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ (voir exo 3).

Prop/Déf : Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété connexe de classe C^k, $k \geq 0$ et $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ une carte telle que φ soit à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors la dimension n ne dépend pas de la carte. On l'appelle la dimension de M et on note M^n.

Ex : $\dim S^2 = 2$

$\dim S^n = n$

$\dim \mathbb{RP}(n) = n$

$\dim \mathbb{CP}(n) = 2n$

Déf : fonctions différentiables entre 2 variétés :
Soient $(N, \mathcal{A})$ et $(M, \mathcal{B})$ deux variétés de classe C^k et $f : N \longrightarrow M$. On dit que f est différentiable (resp. de classe C^r, $r \leq k$) en $x \in N$ si pour une carte $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$ et une carte $(\mathcal{U}', \varphi') \in \mathcal{B}$ telles que $x \in \mathcal{U}$ et $f(x) \in \mathcal{U}'$ l'application $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable (resp. de classe C^r) en $\varphi(x)$.

$$\begin{tikzcd}
N \supset \underset{\ni x}{\mathcal{U}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \underset{\ni f(x)}{\mathcal{U}'} \subset M \arrow[d, "\varphi'"] \\
\mathbb{R}^n \supset \varphi(\mathcal{U}) \arrow[r, bend right, "\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}"] & \varphi'(\mathcal{U}') \subset \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$

Rque : Cette notion ne dépend pas des cartes choisies : si on prend deux autres cartes $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ et $(V', \psi') \in \mathcal{B}$ tq $x \in V$ et $f(x) \in V'$ alors :

$$\psi' \circ f \circ \psi^{-1} = \underbrace{\psi' \circ \varphi'^{-1}}_{\substack{\text{différentiable} \\ \text{de classe } C^k \\ k \geq r}} \circ \underbrace{\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}}_{\substack{\text{différentiable} \\ \text{de classe } C^r}} \circ \underbrace{\varphi \circ \psi^{-1}}_{\substack{\text{différentiable} \\ \text{de classe } C^k \\ k \geq r}}$$

Exemple : $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ est C^∞.

<u>Rappel</u> : $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} PAQ$
où $P \in GL(n,\mathbb{R})$ et $Q \in GL(p,\mathbb{R})$

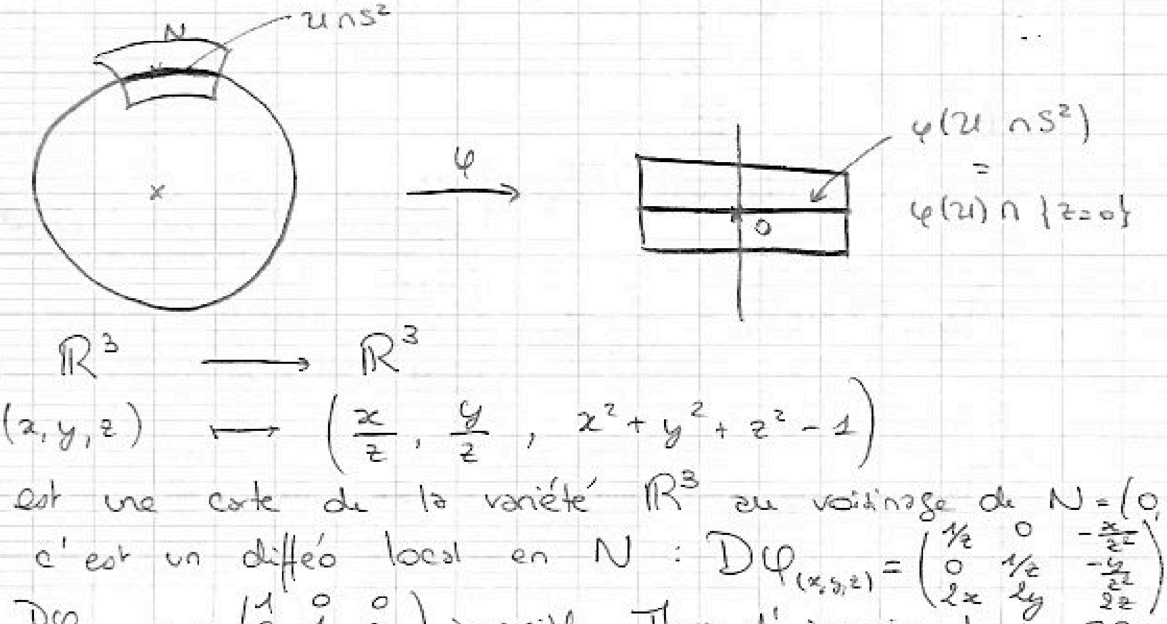
<u>Déf</u> : Soit $f : N \longrightarrow M$ une fonction (entre 2 variétés $C^k, k\geq 1$) différentiable en $x \in N$. Le rang de f est le rang de la différentielle de $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ en x,
où φ est une application de carte définie au vois de x
φ' " " " " $f(x)$

<u>Rque</u> : notion indépendante des cartes choisie.

c. <u>Sous-variétés</u> :

<u>Déf</u> : Soit N un sous-ensemble d'une variété M^n muni de la topologie induite. On dit que N est une <u>sous-variété</u> de M si $\forall x \in N$, il existe une carte locale $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M avec $x \in \mathcal{U}$ telle que φ induise un homéomorphisme de $\mathcal{U} \cap N$ sur $\varphi(\mathcal{U}) \cap F$ où F est un sev de $\mathbb{R}^n$.

<u>Exemple de sous-variété</u> : $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$



$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, x^2+y^2+z^2-1\right)$$

φ est une carte de la variété $\mathbb{R}^3$ au voisinage de $N=(0,0,1)$ car c'est un difféo local en N : $D\varphi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1/z & 0 & -\frac{x}{z^2} \\ 0 & 1/z & -\frac{y}{z^2} \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$
et $D\varphi_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ inversible. <u>Thm d'inversion local</u> : $\exists\, \mathcal{U} \ni N$ tq φ réalise un difféo de $\mathcal{U}$ sur $\varphi(\mathcal{U})$.

Thm de Whitney: Toute variété séparé à base dénombrable M^n est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ $(n \geq 1)$

d. Immersion, Submersion, plongement:

Déf: Une application différentiable $f : N^n \longrightarrow M$ entre deux variétés est une immersion en (resp. submersion) en $x \in N$ si le rang de f en x est $n = \dim N$ (resp. $m = \dim M$).

Rque: existence d'une immersion $f : N^n \longrightarrow M^m \Rightarrow n \leq m$
existence d'une submersion $f : N^n \longrightarrow M^m \Rightarrow n \geq m$

Déf: Une application $f : N \to M$ est une immersion (resp. submersion) si f est une immersion (resp. submersion) en tout point de N.

Ex: L'injection canonique $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion de S^2 dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, au voisinage de N:

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

$$\overset{\mathbb{R}^2}{\underset{(u,v)}{\cup}} \xrightarrow{i \circ \varphi_1^{-1}} \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right)$$

$$D_{(u,v)}\left(i \circ \varphi_1^{-1}\right) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \\ -u & -v \end{pmatrix}$$

$$D_{(0,0)}\left(i \circ \varphi_1^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ de rang 2.

<u>Ex</u>: L'application rayon $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

est une submersion en tout point non nul de $\mathbb{R}^3$ car $D_{(x,y,z)} R = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ de rang 1 si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

<u>Prop</u>: (Forme canonique des immersions et submersions)

1) Soit $f : N^n \longrightarrow M^m$ une immersion en $x \in N$. Alors il existe des cartes locales $(\mathcal{U}, \varphi)$ en x et $(\mathcal{U}', \varphi')$ en $f(x)$ telles que :

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cup}{\varphi(\mathcal{U})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cup}{\varphi'(\mathcal{U}')}}$$

soit l'injection canonique

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n \text{ coord nulles}})$$

2) Soit $g : N^n \longrightarrow M^m$ une submersion en $x \in N$. Alors il existe des cartes locales $(\mathcal{U}, \varphi)$ en x et $(\mathcal{U}', \varphi')$ en $f(x)$ telles que :

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cup}{\varphi(\mathcal{U})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cup}{\varphi'(\mathcal{U}')}}$$

soit la projection canonique $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_m)$ (on projète sur les m premières coordonnées).

<u>Exemple</u>: 1)

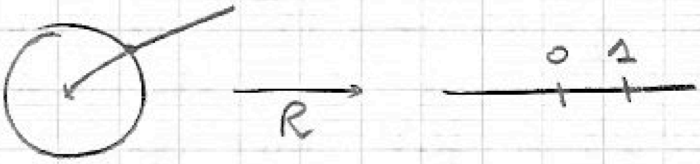
$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\
 & \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right) \arrow[d, "\varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, x^2+y^2+z^2-1\right)"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[uu, "\varphi_1^{-1}"] & \mathbb{R}^3 \\
(u,v) \arrow[ruu, "i \circ \varphi_1^{-1}"] \arrow[rd] & \\
 & (u,v,0)
\end{tikzcd}$$

2. rayon R :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R} \\
(x,y,z) \arrow[r] & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
]0,+\infty[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[\arrow[u, "\text{coordonnées}"', "\text{sphériques}"] & \\
(r,\theta,\varphi) \arrow[r, mapsto] & r
\end{tikzcd}$$

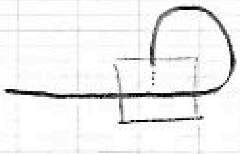
__Prop:__ (image réciproque par une submersion)
Soit $f : N^n \to M^p$ une application différentiable qui soit une submersion en tout point de l'ensemble $f^{-1}(y)$ où $\underline{y} \in M$. Alors $f^{-1}(\underline{y})$ est une sous-variété de N de dim $n-p$.

__Ex:__ $S^2 = R^{-1}(1)$ sous-variété de $\mathbb{R}^3$

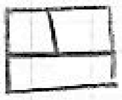


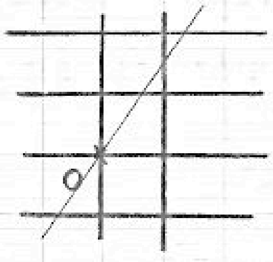
⚠ L'image d'une variété par une immersion n'est pas toujours une sous-variété de l'espace d'arrivée :

ex :



localement :

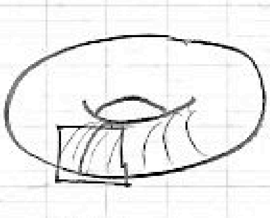




$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

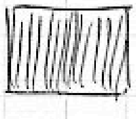
pente irrationnelle

$\simeq$



orbite dense

localement :

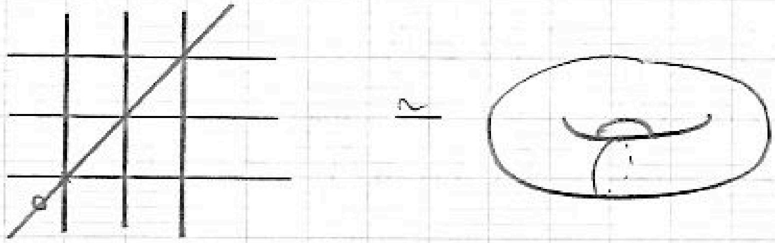


<u>Rappel</u>: Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X. Un ensemble Θ de $X/_\sim$ est ouvert pour la topologie quotient ssi $\pi^{-1}(\Theta)$ est un ouvert de X où $\pi : X \longrightarrow X/_\sim$ est la projection canonique.

$f : X/_\sim \longrightarrow Z$ est continue $\Longleftrightarrow$ $f \circ \pi : X \longrightarrow Z$ est continue

<u>Déf</u>: Une application $f : N \longrightarrow M$ est un <u>plongement</u> ssi c'est une immersion qui réalise un <u>homéomorphisme</u> sur son image

<u>Ex</u>: $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ plongement



pente rationnelle

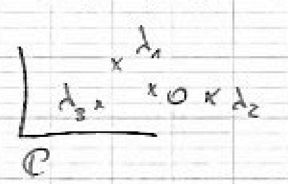
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ x & \longmapsto & [(x,x)] \end{array}$$ plongement

<u>Prop</u>: Soit $f : N^n \longrightarrow M$ un plongement. Alors $f(N)$ est une sous-variété de M de dimension n.

e. <u>Applications aux groupes de matrices</u>:

1) $\det : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice. C'est donc une application C^∞ entre $M(n,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ et $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par l'application continue det. C'est un ouvert de $M(n, \mathbb{C})$, donc une sous-variété de l'espace vectoriel $M(n, \mathbb{C})$.
De plus $GL(n, \mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M(n, \mathbb{C})$. En effet, toute matrice $A \in M(n, \mathbb{C})$ peut s'approximer par des matrices inversibles : on considère les valeurs propres λ_i de A :
soit $r = \{\inf |\lambda_i|, \lambda_i \neq 0\}$.



Pour $0 < \lambda < r$ $\det(A - \lambda I) \neq 0$
donc $A - \lambda I$ est inversible et tend vers A lorsque $\lambda \to 0$.

1bis) Idem pour $GL(n, R) \subset M(n, \mathbb{R})$.

2) $SL(n, \mathbb{C}) = \det^{-1}(\{1\})$
det : $M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une submersion en tout point de $SL(n, \mathbb{C})$. En effet:

Différentielle du déterminant en Id:

$$\det(Id + tA) = \begin{vmatrix} 1+ta_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ta_{12} & 1+ta_{22} & \\ \vdots & \ddots & 1+ta_{nn} \end{vmatrix} = 1 + t(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + o(t^2)$$

$$D_I(\det)(A) = \mathrm{Tr}\, A$$

Différentielle du déterminant en $M \in GL(n, \mathbb{C})$:

$$\det(M + tA) = \det M(Id + tM^{-1}A) = \det M \det(Id + tM^{-1}A)$$

$$D_M(\det)(A) = \det M \,\mathrm{Tr}\, M^{-1}A = \mathrm{Tr}\,(\det M) M^{-1}A$$
$$= \mathrm{Tr}\ \mathrm{comat}(M)^T A.$$

En particulier en $M \in SL(n,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} D_M(\det) : M(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto \mathrm{Tr}\, M^{-1}A \end{aligned}$$ est surjective.

(Un antécédent de $\lambda \in \mathbb{C}$ est $A = \frac{\lambda M}{n}$)

Ainsi $SL(n,\mathbb{C})$ est une sous-variété de $M(n,\mathbb{C})$ (et même de $GL(n,\mathbb{C})$). On a

$$\dim_{\mathbb{R}} SL(n,\mathbb{C}) = 2(n^2-1)$$

2bis) Idem pour $SL(n,\mathbb{R})$: $\dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2-1$.

3) $O(n,\mathbb{C}) = \{M \in M(n,\mathbb{C}),\ M^T M = Id\}$

$$\begin{aligned} f : M(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow M(n,\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto M^T M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_M f : M(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow M(n,\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^T M + M^T A \end{aligned}$$ pas surjective

car l'image est contenue dans le sous-espace vectoriel complexe des matrices symétriques :

$Sym(n,\mathbb{C}) = \{M \in M(n,\mathbb{C}),\ M^T = M\}$.

On définit $\bar f : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow Sym(n,\mathbb{C})$

Alors $D_M \bar f$ est surjective en tout point $M \in O(n,\mathbb{C})$:

$$D_M \bar f\left(\frac{1}{2} M X\right) = \frac{1}{2} X^T M^T M + \frac{1}{2} M^T M X = \frac{X^T + X}{2} = X$$

pour $M \in O(n,\mathbb{C})$ et $X \in Sym(n,\mathbb{C})$.

Ainsi $\bar f$ est une submersion en tout point de $O(n,\mathbb{C}) = \bar f^{-1}(Id)$

$\Rightarrow O(n,\mathbb{C})$ est une sous-variété de $M(n,\mathbb{C})$ (même de $GL(n,\mathbb{C})$ de dimension $n^2 - n$.

3bis) Idem $O(n,\mathbb{R}) \subset M(n,\mathbb{R})$ $\dim O(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Rappel: notion de compacité

Def 1: un espace topologique séparé X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Def 2: un espace topologique séparé X est dit séquentiellement compact si de toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergente

⚠ Equivalence entre les 2 notions si la topologie de X est métrisable. Sinon ???

Thm Borel: compact de $\mathbb{R}^n$ = fermés bornés

Thm Smirnov: X métrisable $\Leftrightarrow$ X paracompact + loc. métrisable

Csque: une variété est métrisable ssi elle est paracompacte

$\Rightarrow$ $O(n,\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M(n,\mathbb{R})$ donc c'est un compact.

- $O(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(Id)$ fermé
- $\forall M \in O(n,\mathbb{R})$ $\sqrt{\mathrm{Tr}\, M^T M} := \|M\|_2 = \sqrt{n}$ borné

f. Variété produit :

Déf : Soient $(N, \mathcal{A})$ et $(M, \mathcal{B})$ deux variétés de classe C^k. La variété produit $N \times M$ est l'espace topologique $N \times M$ muni du complété C^k de l'atlas $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dont les cartes sont de la forme $\big((U \times V), (\varphi, \psi)\big)$ où $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \psi) \in \mathcal{B}$.

Exemple :

La variété produit $S^2 \times \mathbb{R}^{+*}$ est difféomorphe à l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. En effet, l'application

$$F : S^2 \times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$
$$(Q, r) \longmapsto r\overrightarrow{OQ}$$

est une bijection de bijection réciproque :

$$F^{-1} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow S^2 \times]0,+\infty[$$
$$\vec{v} \longmapsto \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \|\vec{v}\|\right)$$

Pour montrer que F et F^{-1} sont C^∞ on regarde dans des cartes :

$$S^2 \qquad]0,+\infty[\qquad \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$
$$\cup \qquad \cup \qquad \cup$$

1)
$$\begin{tikzcd}
\text{hémisphère nord} \times]0,+\infty[\arrow[r, "F"] \arrow[d, "(\varphi_1, id)"] & \{z > 0\} \arrow[d, "id"] \\
\mathbb{R}^2 \times]0,+\infty[\arrow[r] & \{z > 0\}
\end{tikzcd}$$

$$\big((u,v), r\big) \xrightarrow{F \circ \varphi_1^{-1}} \left(\frac{ru}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{rv}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right)$$

$$\left(\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \xleftarrow{\varphi_1 \circ F^{-1}} (x, y, z)$$

2)

$$\begin{tikzcd}
S^2 & \\
S^2 \setminus \{N\} \times]0,+\infty[\arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "(\varphi_3 , id)"] & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z < 0\} \arrow[d, "id"] \\
\mathbb{R}^2 \times]0,+\infty[\arrow[r, "F\circ\varphi_3^{-1}"] & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z < 0\} \\
((u,v) , r) \arrow[r, mapsto] & \left(\frac{4ru}{4+u^2+v^2}, \frac{4vr}{4+u^2+v^2}, r\frac{u^2+v^2-4}{4+u^2+v^2}\right) \\
\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}\right), \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) & (x, y, z) \arrow[l, mapsto, "\varphi_3\circ F^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ F et F^{-1} sont C^∞ en tout point de $S^2 \times]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ respectivement. F est donc un difféomorphisme entre $S^2 \times]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Rque:

On peut aussi utiliser les coordonnées sphériques mais attention aux domaines de définition !

3. Groupes de Lie et sous-groupes de Lie

Rappel: Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\cdot : G \times G \to G$ forme un groupe d'élément neutre $e \in G$ ssi :

1) $\forall g_1, g_2, g_3 \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
2) $\forall g \in G , e \cdot g = g \cdot e = g$
3) $\forall g \in G , \exists h \in G$ tel que $g . h = h . g = e$
(h est appelé l'inverse de g et est noté g^{-1}).

<u>Exemples</u>: $M(n, \mathbb{R})$, + groupe additif
$GL(n, \mathbb{C})$ muni du produit de matrice est un groupe non commutatif dès que $n \geq 2$.

<u>Déf</u>: Soit G un groupe muni d'une structure de variété de classe C^k. On dit que G est un groupe de Lie de classe C^k si et seulement si les opérations produit : $\begin{array}{l} G \times G \longrightarrow G \\ (g, h) \longmapsto g \cdot h \end{array}$ et

inverse : $\begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ g \longmapsto g^{-1} \end{array}$ sont de classe C^k.

<u>Ex</u>: $GL(n, \mathbb{R})$: $AB = \left(\Sigma a_{ij} b_{jk} \right)$ C^∞

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\text{comat}(A) \right)^T \quad C^\infty$$

<u>Déf</u>: Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe de G. On dit que H est un sous-groupe <u>de Lie</u> de G si H est une sous-variété de G

⚠ Cette définition dépend des auteurs !
(cf thm de Von Neumann au chapitre 3)

<u>Ex</u>: $O(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$
$O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$
...

On en dira plus sur les sous-groupes de Lie au chapitre 6...