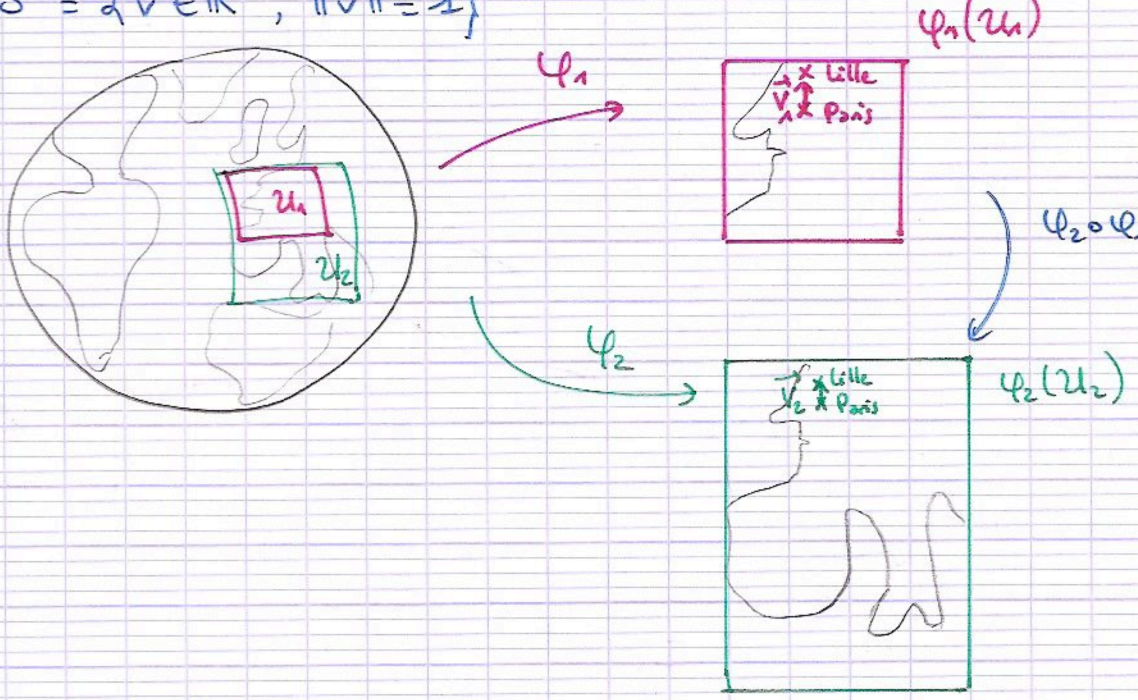
Chapitre 2 : Algèbre de Lie associée à un groupe de Lie

1. Vecteurs, champs de vecteurs, crochet :

a. Vecteur tangent à une variété :

$S^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \|\vec{v}\| = 1\}$



$$\vec{V}_2 = D_{\text{Paris}}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\vec{V}_1)$$

point qui représente Paris dans la carte rouge

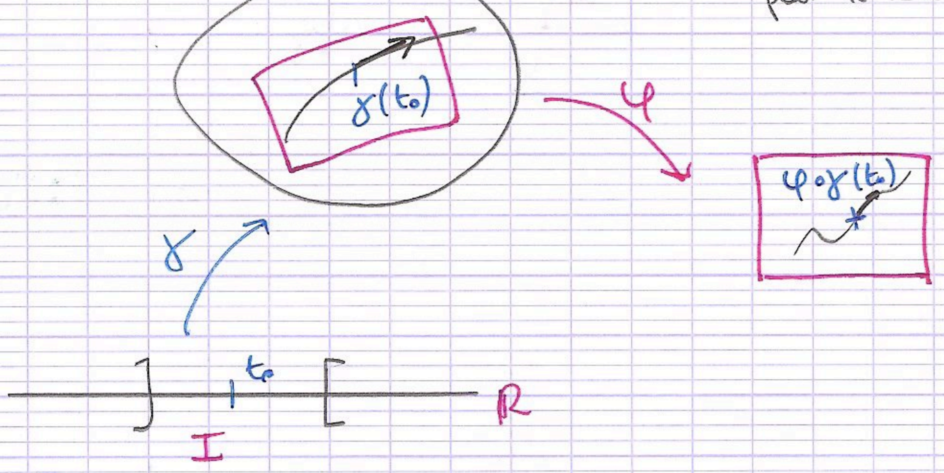
Déf : Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable. Un vecteur tangent à M en $m \in M$ est une classe d'équivalence de couples $(\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi))$, où $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$ est une carte au voisinage de $m \in \mathcal{U}$, pour la relation d'équivalence :

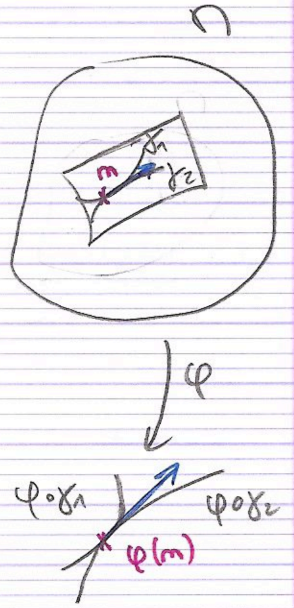
$$(\vec{v}_1, (\mathcal{U}_1, \varphi_1)) \sim (\vec{v}_2, (\mathcal{U}_2, \varphi_2)) \Leftrightarrow D_{\varphi_1(m)}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\vec{v}_1) = \vec{v}_2 .$$

<u>Déf</u>: Soient $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable et $\gamma : I \to M$ une courbe différentiable définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans M. Le <u>vecteur vitesse</u> de γ en $t_0 \in I$ est le vecteur tangent à M en $\gamma(t_0)$ défini par la classe d'équivalence :

$$\gamma'(t_0) = \left[(\varphi \circ \gamma)'(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \frac{\varphi\circ\gamma(t) - \varphi\circ\gamma(t_0)}{t - t_0},\ (\mathcal{U}, \varphi) \right]_{\sim}$$

classe d'équivalence pour la relation $\sim$





<u>Rque</u>: Deux courbes $\gamma_1 : I_1 \to M$ et $\gamma_2 : I_2 \to M$ ont même vecteur tangent en $m = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) \in M$ si et seulement si, dans n'importe quelle carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ avec $m \in \mathcal{U}$, les courbes $\varphi\circ\gamma_1(t)$ et $\varphi\circ\gamma_2(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ont même vecteur tangent en $\varphi(m)$:

$$(\varphi\circ\gamma_1)'(t_1) = (\varphi\circ\gamma_2)'(t_2). \qquad (*)$$

En effet, si l'égalité $(*)$ est vérifiée dans <u>une</u> carte, elle est vérifiée dans toutes les cartes de M contenant le point m.

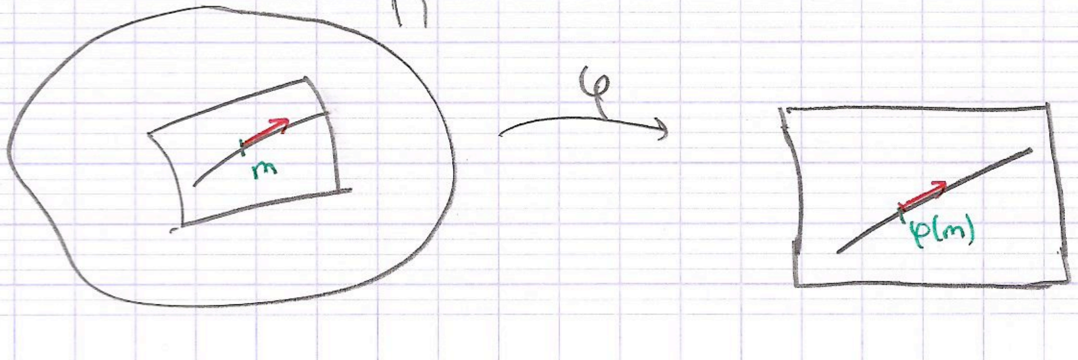
<u>Csque:</u> on peut aussi considérer un vecteur tangent à une variété M en $m \in M$ comme une classe d'équivalence de courbe $\gamma : I \to M$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et où $\gamma(0) = m$, pour la relation d'équivalence

$\gamma_1 \approx \gamma_2 \iff \exists\, (\mathcal{U}, \varphi)$ carte de M au voisinage de $m \in \mathcal{U}$ telle que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$

On a une bijection :

classe d'équivalence de courbe	$\longrightarrow$	classe d'équivalence de couples (vecteur, carte)
$[\gamma]_\approx$	$\longmapsto$	$\left[(\varphi\circ\gamma)'(0), (\mathcal{U}, \varphi)\right]_\sim$
$\left[\varphi^{-1}(\varphi(m) + t\vec{v})\right]_\approx$	$\longleftarrow$	$\left[\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)\right]_\sim$

(Tout vecteur tangent à M en m est le vecteur vitesse d'une courbe γ (d'une infinité en fait)
Par exemple, une courbe tangente au vecteur $v = [\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)]$ est $t \mapsto \varphi^{-1}(\underbrace{\varphi(m) + t\vec{v}}_{\text{droite dans } \mathbb{R}^n})$)



b. Espace tangent à une variété en un point m :

Déf : L'espace tangent à M en m est l'ensemble des vecteurs tangents à M en m. Il est noté $T_m M$.

Prop : $T_m M^n$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension n.

Dem : . le vecteur nul est $[\vec{0}_{\mathbb{R}^n}, (\mathcal{U}, \varphi)]_\sim$ pour n'importe quelle carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ avec $m \in \mathcal{U}$.

. soient $v, w \in T_m M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut toujours se ramener au cas où

$$v = [\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)]_\sim \quad \text{et} \quad w = [\vec{w}, (\mathcal{U}, \varphi)]_\sim$$

avec la même carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ telle que $m \in \mathcal{U}$.

En effet, on a :

$$[\vec{v}, (\mathcal{U}_1, \varphi_1)]_\sim = [\vec{v}, (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, \varphi_1)]_\sim$$

et

$$[\vec{w}, (\mathcal{U}_2, \varphi_2)]_\sim = [D_{\varphi'(m)}(\varphi \circ (\varphi')^{-1})(\vec{w}), (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, \varphi_1)]_\sim$$

Alors on définit : $v + \lambda w = [\vec{v} + \lambda \vec{w}, (\mathcal{U}, \varphi)]_\sim$

Cette définition est indépendante du choix de la carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ car pour toute autre carte $(\mathcal{U}', \varphi')$, $D_{\varphi(m)} \varphi' \circ \varphi^{-1}$ est <u>linéaire</u> :

$$D_{\varphi(m)} \varphi' \circ \varphi^{-1}(\vec{v} + \lambda \vec{w}) = D_{\varphi(m)} \varphi' \circ \varphi^{-1}(\vec{v}) + \lambda D_{\varphi(m)} \varphi' \circ \varphi^{-1}(\vec{w})$$

$\Rightarrow T_m M$ est un espace vectoriel réel.

. $\dim T_m M^n = n$ car, étant donné une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ avec $m \in \mathcal{U}$, $T_m M$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$ par

$$\underset{T_m M}{\underset{\cap}{v}} = [\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)]_\sim \longrightarrow \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

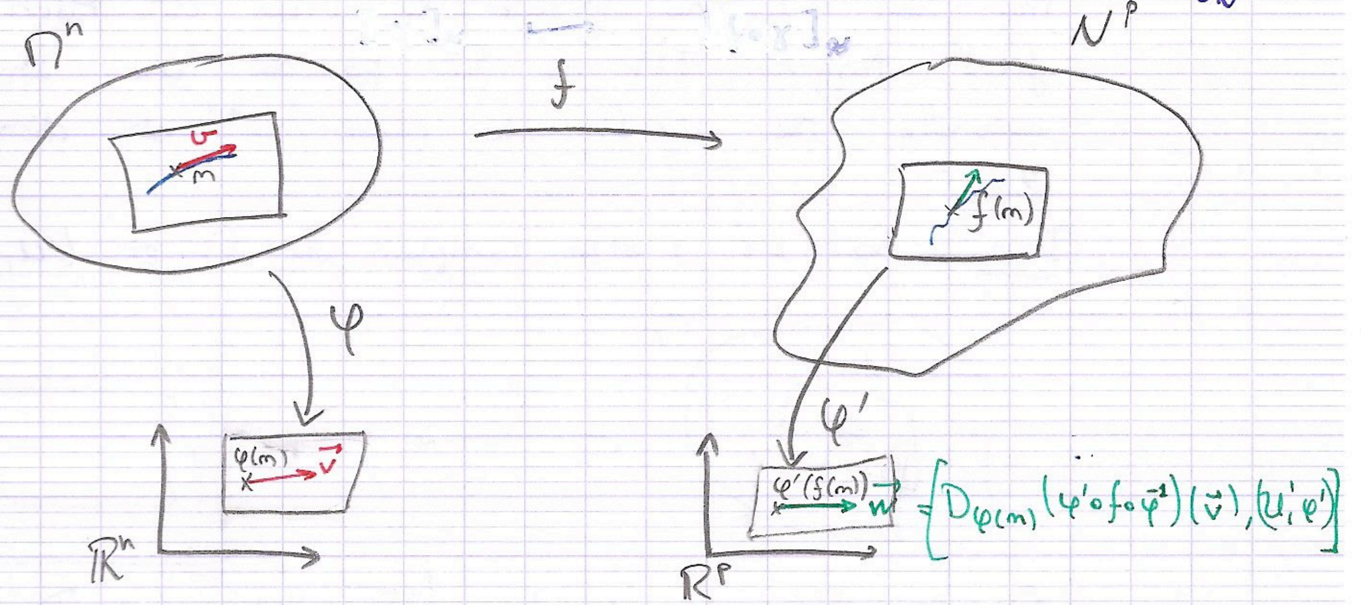
Ex : Soit Θ un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \Theta$. Alors $T_x\Theta$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$ par

$$T_x\Theta \ni v = [\vec{v}, (\Theta, id)]_\sim \longrightarrow \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

c. Application tangente ou différentielle :

Déf : Soit $f : \Pi^n \longrightarrow N^p$ une application différentiable entre deux variétés de classe C^k, $k \geq 1$. On appelle <u>différentielle de f</u> en $m \in \Pi$, et on note $D_m f$, l'application de $T_m\Pi$ dans $T_{f(m)}N$ définie par :

$$\begin{aligned} D_m f : \quad T_m\Pi &\longrightarrow T_{f(m)}N \\ v = [\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)]_\sim &\longmapsto \left[D_{\varphi(m)}(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})(\vec{v}), (\mathcal{U}', \varphi')\right]_\sim \end{aligned}$$



Déf : On appelle <u>application tangente ou différentielle</u> de $f : \Pi^n \longrightarrow N^p$ l'application $m \longmapsto D_m f$.
(elle est parfois notée Tf ou f_*).

Rqu : Si on pense les vecteurs tangents comme classe d'équivalence de courbe, on a : $D_m f([\gamma]_x) = [f \circ \gamma]_\approx$

d. Fibré tangent à une variété :

Déf : Le fibré tangent TM d'une variété M est défini comme l'union disjointe des espaces tangents :

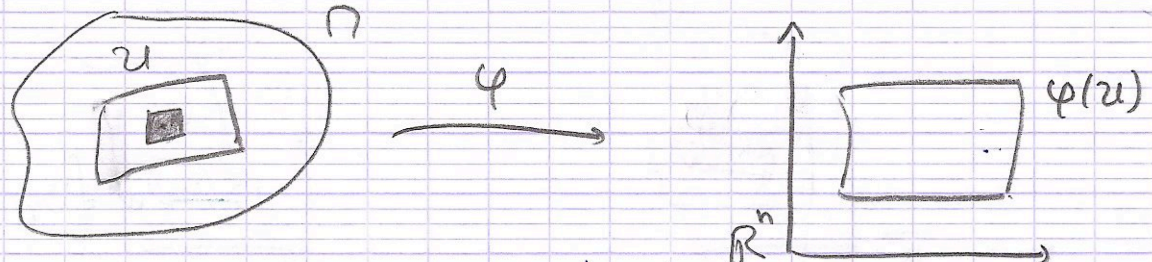
$$TM = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times T_m M.$$

Rque : si $v \in \{m_1\} \times T_{m_1} M$ et $w \in \{m_2\} \times T_{m_2} M$
alors $v = w \Rightarrow m_1 = m_2$ et $v = w$ dans $T_{m_1} M$.

Déf : La projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$
est définie par : $\left(\{m\}, \underset{T_m M}{\underset{\cap}{v}}\right) \longrightarrow m$
(on oublie le vecteur, on ne garde que le point d'encrage)

Prop : Soit M une variété de classe C^k. Alors le fibré tangent TM de M possède une structure naturelle de variété de classe C^{k-1} de dimension $2n$.

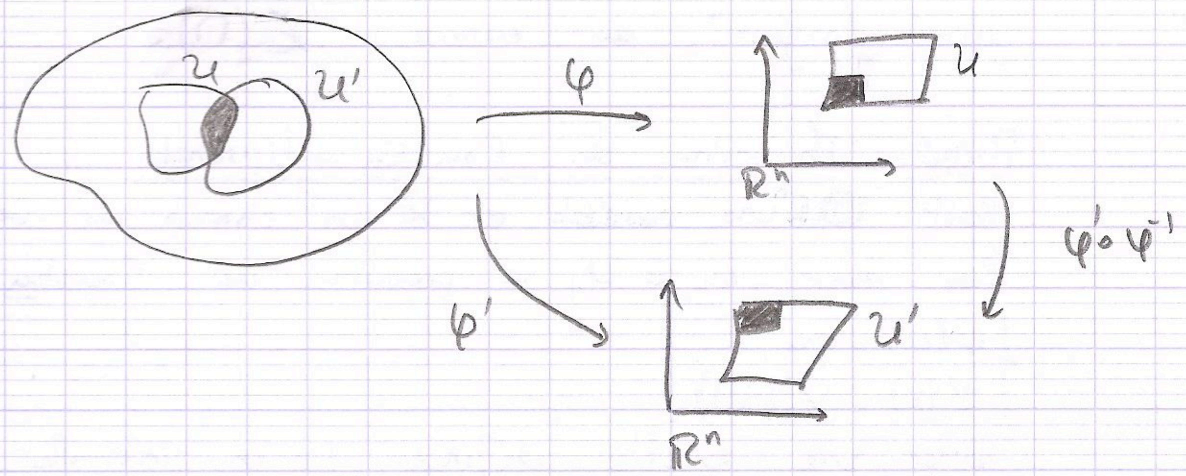
Dem : • Soit $\mathcal{A}$ l'atlas complet de M.



On considère les couples $\left(\pi^{-1}(\mathcal{U}), (\varphi, D\varphi)\right)$ où $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$ et où

$$(\varphi, D\varphi) : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$$
$$\left(\underset{\mathcal{U}}{\underset{\cap}{\{m\}}}, \underset{T_m M}{\underset{\cap}{v}}\right) \longrightarrow (\varphi(m), D_m\varphi(v)).$$

Etant donnés deux cartes $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{U}', \varphi') \in \mathcal{A}$:



l'application :

$$(\varphi' \circ \varphi^{-1}, D(\varphi' \circ \varphi^{-1})) : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi'(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \times \mathbb{R}^n$$
$$(x, \vec{v}) \longmapsto (\varphi' \circ \varphi^{-1}(x), D_x(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\vec{v}))$$

est de classe C^{k-1}.

- On munit TM de la topologie la plus grossière rendant les applications $(\varphi, D\varphi)$ continues. C'est une topologie séparée car $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est séparé.
- L'atlas $D\mathcal{A} = \bigcup_{(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}} (\pi^{-1}(\mathcal{U}), (\varphi, D\varphi))$ est un

atlas $C^{k-1} \Rightarrow$ le fibré tangent TM muni du complété C^{k-1} de $D\mathcal{A}$ est une variété de classe C^{k-1}.

e. Champs de vecteurs:

Déf: Un champ de vecteurs sur une variété M est la donnée en tout point de m d'un vecteur tangent appartenant à $T_m M$, c'est-à-dire d'une application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X : M \longrightarrow M$ est l'application identité. Un champ de vecteur est de classe C^r $(r \leq k-1)$ ssi X est de classe C^r.

8.

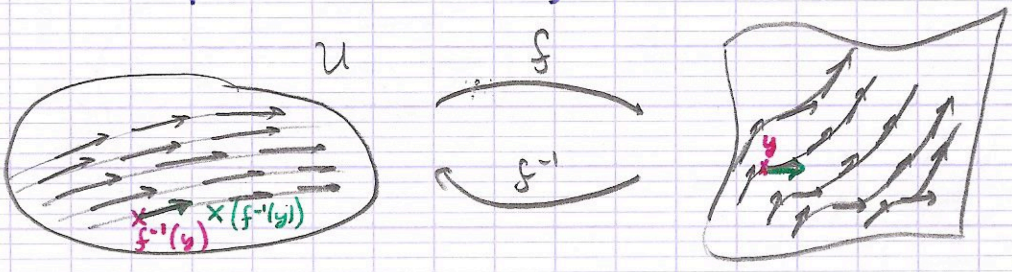
<u>Rque:</u> L'ensemble des champs de vecteurs sur Ω est parfois noté $\Gamma(\Omega, T\Omega)$ pour "section du fibré tangent", ou encore $\mathcal{X}(\Omega)$.

<u>Rappel:</u> <u>Théorème de Cauchy-Lipschitz:</u>
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$. Pour tout $m_0 \in \mathcal{U}$, le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \phi_{m_0}(0) = m_0 \\ \phi_{m_0}'(t) = X(\phi(t)) \end{cases}$$

admet une solution définie sur un intervalle ouvert I_{m_0} (dépendant de m_0) de $\mathbb{R}$ contenant 0. Deux solutions coïncident sur l'intersection de leur domaine de définition.

<u>Déf:</u> On appelle <u>flot de X</u> l'application qui à $(t, m) \in I_m \times \mathcal{U}$ associe $\phi_m(t)$, où ϕ_m est la solution du problème de Cauchy avec donnée initiale $\phi_m(0) = m$. Le flot du champ de vecteur X est noté $\phi_X : (t, m) \mapsto \phi_X(t, m) = \phi_m(t)$ lorsqu'on veut spécifié le champ de vecteur. Il est défini sur l'ouvert $\{(t, m),\ t \in I_m\}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$.



<u>Déf:</u> Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$. Etant donné un difféomorphisme f de $\mathcal{U}$ vers un ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$, on appelle <u>poussé en avant de X par f</u> le champ de vecteur f_*X sur $\mathcal{U}'$ défini par:

$$f_*X(y) = D_{f^{-1}(y)}f\left(X(f^{-1}(y))\right)$$

<u>Rque:</u> Si $X(f^{-1}(y))$ est le vecteur vitesse en $t=0$ de la courbe $\gamma : I \to \mathcal{U}$, alors $f_*X(y)$ est le vecteur vitesse en $t=0$ de la courbe $f \circ \gamma : I \to \mathcal{U}'$.

Rque : Le flot de f_*X est $\Phi_{f_*X}(t,y) = f \circ \Phi_X(t, f^{-1}(y))$

En effet, on a : $\Phi_{f_*X}(0,y) = f \circ \Phi_X(0, f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = y$

et :

$$\frac{d}{dt}_{|t=t_0} \Phi_Y(t,y) = D_{\Phi_X(t_0, f^{-1}(y))} f \left(\frac{d}{dt}_{|t=t_0} \Phi_X(t, f^{-1}(y)) \right)$$

$$= D_{\Phi_X(t_0, f^{-1}(y))} f \left(X(\Phi_X(t, f^{-1}(y))) \right)$$

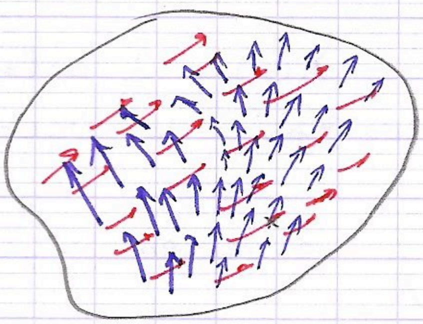
$$= f_*X \left(f \circ \Phi_X(t_0, f^{-1}(y)) \right)$$

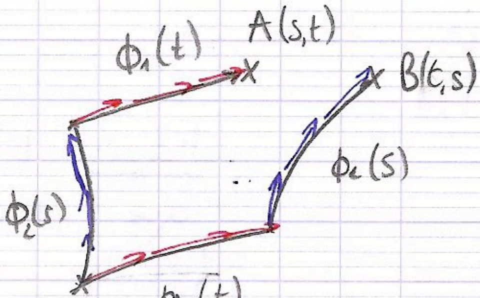
$$= f_*X \left(\Phi_{f_*X}(t,y) \right)$$

Conséquence : Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise au champ de vecteurs sur les variétés : le flot peut être défini dans des cartes et sur l'intersection de deux ouverts de cartes les flots se correspondent.

f. Crochets de champs de vecteurs

idée : le crochet de deux champs de vecteurs mesure la commutativité ou non-commutativité des deux flots.





la différence entre les points d'arrivée $A(s,t) = \phi_1(t) \circ \phi_2(s)(x)$ et $B(t,s) = \phi_2(s) \circ \phi_1(t)(x)$ témoigne du fait que les flots ϕ_1 et ϕ_2 ne commutent pas.

Dans $\mathbb{R}^n$, on peut faire la différence entre les 2 points et considérer la fonction $\xi : (s,t) \mapsto A(s,t) - B(t,s)$.

On a $A(0,s) = B(s,0)$ et $A(t,0) = B(0,t)$, donc $\xi(0,s) = 0$ et $\xi(t,0) = 0$. Ainsi

$$\xi(t,s) = \cancel{\xi(0,0)} + t \frac{d}{dt}_{|0} \cancel{\xi(t,0)} + s \frac{d}{ds}_{|0} \cancel{\xi(0,s)}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2ts \frac{d^2}{dtds}_{|(0,0)} \xi(t,s) + t^2 \frac{d^2}{dt^2}_{|0} \xi(t,0) + s^2 \frac{d^2}{dt^2}_{|0} \xi(0,s)\right) + o(\|(t,s)\|^2)$$

$$\xi(t,s) = \underbrace{ts \frac{d^2}{dtds}_{|(0,0)} \xi(t,s)}_{\text{représenté par le crochet de } X \text{ et } Y.} + o(\|(t,s)\|^2)$$

Def: Soient X et Y deux champs de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$X(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Alors le crochet de X et Y est le champ de vecteur sur $\mathcal{U}$ défini par:

$$[X,Y](x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_1}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_n}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Rque: A un champ de vecteur X sur $\mathcal{U}$ est naturellement associée une dérivation de l'espace $C^\infty(\mathcal{U})$ des fonctions C^∞ sur $\mathcal{U}$ à valeurs réelles:

$$\begin{array}{l} X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \\ \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} \end{array} \longmapsto f \mapsto \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_x f(X(x))$$

Avec cette identification, on a:

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Rque: Soient X et Y deux champs de vecteurs. On a :

$$[X,X]=0 \quad \text{et} \quad [X,Y]=-[Y,X].$$

Prop : Avec l'identification entre champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$ et dérivation des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ à valeurs réelles donnée par :

$$X(x)=\begin{pmatrix} a_1(x)\\ \vdots \\ a_n(x)\end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{l} D_X : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \\ \qquad f \longmapsto a_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+\dots+a_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{array}\right)$$

le crochet de deux champs de vecteurs correspond au commutateur des dérivations associées :

$$[X,Y] \longmapsto \left(\begin{array}{l} [D_X,D_Y] : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \\ \qquad f \longmapsto D_X(D_Y(f))-D_Y(D_X(f)) \end{array}\right)$$

⚠ Un abus de notations courant consiste à identifier X et D_X. On note alors $X(f)$ pour $D_X f$.

Dem : $[D_X,D_Y](f) = D_X(D_Y f) - D_Y(D_X f)$

$$= D_X\left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) - D_Y\left(\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

où $X(x)=(a_1(x),\dots,a_n(x))$

et $Y(x)=(b_1(x),\dots,b_n(x))$

$$= \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) - \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_j(x)\left(\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j}\times\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + b_i(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)\right)$$

$$- \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_j(x)\left(\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + a_i(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\left(a_j(x)\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j} - b_j(x)\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$= [X,Y](x)(f)$$

Corollaire : Le crochet de champs de vecteurs vérifie l'identité de Jacobi : $\forall X,Y,Z$ champ de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$,

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

<u>Dem</u>: Provient du fait que l'ensemble des dérivations vérifient l'identité de Jacobi pour le commutateur : $\forall D_1, D_2, D_3$ dérivations de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$:

$$[D_1,[D_2,D_3]] + [D_2,[D_3,D_1]] + [D_3[D_1,D_2]] = 0.$$

En effet :

$$[D_2,D_3](f) = D_2 \circ D_3(f) - D_3 \circ D_2(f)$$

$$\begin{aligned}
[D_1,[D_2,D_3]](f) &= \cancel{D_1 \circ D_2 \circ D_3(f)} - \cancel{D_1 \circ D_3 \circ D_2(f)} \\
&\quad - \cancel{D_2 \circ D_3 \circ D_1(f)} + \cancel{D_3 \circ D_2 \circ D_1(f)} \\
+[D_2,[D_3,D_1]](f) &= \cancel{D_2 \circ D_3 \circ D_1(f)} - \cancel{D_2 \circ D_1 \circ D_3(f)} \\
&\quad - D_3 \circ D_1 \circ D_2(f) + \cancel{D_1 \circ D_3 \circ D_2(f)} \\
+[D_3,[D_1,D_2]](f) &= D_3 \circ D_1 \circ D_2(f) - \cancel{D_3 \circ D_2 \circ D_1(f)} \\
&\quad - \cancel{D_1 \circ D_2 \circ D_3(f)} + \cancel{D_2 \circ D_1 \circ D_3(f)} \\
\hline
&= 0
\end{aligned}$$

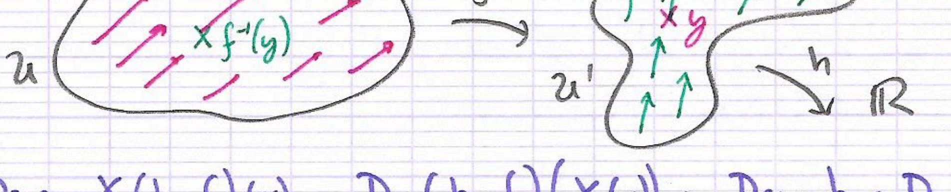
<u>Prop</u>: Soit f un difféomorphisme entre deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$. Alors la dérivation correspondant au champ de vecteurs $f_* X$ est :

$$f_*X : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}') \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}')$$
$$h \longmapsto \left(y \mapsto X(h\circ f)(f^{-1}(y))\right)$$

Autrement dit :

$$\underbrace{(f_*X)(h)(y)}_{f_*X \text{ appliqué à } h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}') \text{ évalué au point } y} = X(h\circ f)(f^{-1}(y)) = \underbrace{X_{f^{-1}(y)}}_{= X(f^{-1}(y)) = \text{valeur du champ de vecteurs } X \text{ au point } f^{-1}(y).}(h\circ f)$$

⚠ $X(h\circ f)$ veut dire $D_X(h\circ f)$



<u>Dem</u>: $X(h\circ f)(x) = D_x(h\circ f)(X(x)) = D_{f(x)}h \circ D_x f(X(x))$
$= D_{f(x)}h\,(f_*X(f(x))) = (f_*X)_{f(x)}(h).$

<u>Corollaire:</u> Soit f un difféomorphisme entre deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de $\mathbb{R}^n$, et X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$. Alors :

$$f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$$

<u>Dem:</u> On va montrer que les deux dérivations associées coïncident. Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}')$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}'$ à valeurs réelles. Alors:

$$\left(f_*[X,Y]\right)_y(h) = \underbrace{[X,Y]}_{\text{chp de vecteur}} \underbrace{(f^{-1}(y))}_{\substack{\text{point}\\ \text{d'encrage}\\ \text{considéré}}} \underbrace{(h\circ f)}_{\substack{\text{fonction à dériver en}\\ f^{-1}(y) \text{ le long de}\\ [X,Y](f^{-1}(y))}}$$

$$= \underbrace{X\big(Y(h\circ f)\big)(f^{-1}(y))}_{\text{fonction évaluée en } f^{-1}(y)} - \underbrace{Y\big(X(h\circ f)\big)(f^{-1}(y))}_{\text{fonction évaluée en } f^{-1}(y)}$$

$$= \underbrace{X_{f^{-1}(y)}}_{\substack{\text{valeur de}\\ X \text{ en } f^{-1}(y)}} \underbrace{(f_*Y(h))}_{\text{fonction sur } \mathcal{U}'} - Y_{f^{-1}(y)}\,(f_*X(h))$$

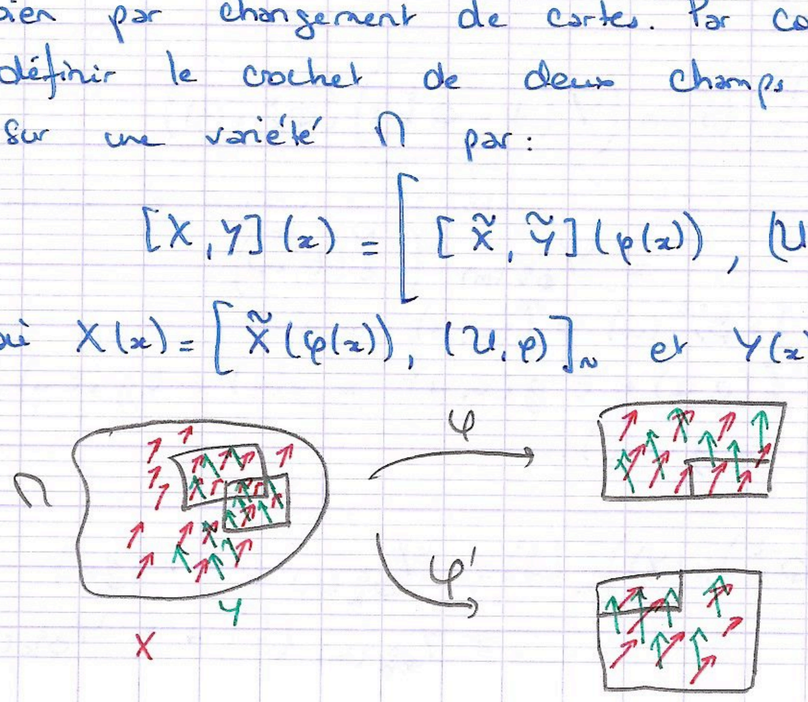
$$= (f_*X)_y(f_*Y(h)) - (f_*Y)_y(f_*X(h))$$

$$= [f_*X, f_*Y]_y(h).$$

<u>Csque:</u> Le crochet des champs de vecteurs se comporte bien par changement de cartes. Par conséquent on peut définir le crochet de deux champs de vecteurs X et Y sur une variété Ω par:

$$[X,Y](x) = \left[\,[\tilde{X},\tilde{Y}](\varphi(x)),\ (\mathcal{U},\varphi)\right]_\sim$$

où $X(x) = \left[\tilde{X}(\varphi(x)), (\mathcal{U},\varphi)\right]_\sim$ et $Y(x) = \left[\tilde{Y}(\varphi(x)), (\mathcal{U},\varphi)\right]_\sim$



$$\begin{array}{c}[\varphi_*X, \varphi_*Y] \\ \big\downarrow D(\varphi'\circ\varphi^{-1}) \\ [(\varphi')_*X, (\varphi')_*Y].\end{array}$$

<u>Déf:</u> Soient X et Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M. La <u>dérivée de Lie</u> de Y le long de X est le champ de vecteurs

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\phi_X^{-t}\right)_* Y \quad \text{où } \phi_X^{-t} \text{ est le flot de } X$$

En particulier :

$$\mathcal{L}_X Y(m) = \frac{d}{dt}_{|t=0} D\phi_X^{-t}\left(Y(\phi_X^t(m))\right)$$

<u>Prop:</u> Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M.
Alors :
$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

<u>Dem:</u> Il suffit de le montrer pour un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$.
On va montrer que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, $\mathcal{L}_X Y(f) = [X,Y](f)$.
Etant donnée $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, on pose

$$\tilde{f}(t,m) = f(\phi_X^{-t}(m))$$

On a $\tilde{f}(t,m) - \tilde{f}(0,m) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(s,m)\,ds = t\int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(st,m)\,ds$

Posons $g(t,m) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(st,m)\,ds$.

Puisque f et ϕ_X sont $\mathcal{C}^\infty$, $\tilde{f}$ et g sont $\mathcal{C}^\infty$.

Il vient :
$$g(0,m) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(0,m) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} f(\phi_X^t(m))$$
$$= D_m f\left(\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\phi_X(-t,m)\right) = D_m f(-X(m))$$
$$= X(f)(m)$$

<u>De plus :</u>

$$\underbrace{\left(\left(\phi_X^{-t}\right)_*(Y)\right)_m(f)}_{\text{vecteur en } m \text{ appliqué à } f} = \underbrace{\left(Y(f\circ\phi_X^{-t})\right)}_{\text{fonction sur } \mathcal{U} \text{ évaluée en } \phi_X^t(m)}(\phi_X^t(m))$$

$$= Y_{\phi_X^t(m)}\left(f\circ\phi_X^{-t}\right)$$

Or $u \mapsto f\circ\phi_X^{-t}(u) = \tilde{f}(t,u)$ s'écrit
$u \mapsto \tilde{f}(0,u) + t\,g(t,u) = f(u) + t g(t,u) = (f + tg_t)(u)$
où $g_t(u) := g(t,u)$.

Ainsi :
$$\left(\left(\phi_X^{-t}\right)_*(Y)\right)_m(f) = Y_{\phi_X^t(m)}(f + tg_t)$$
$$= Y_{\phi_X^t(m)}(f) + t\,Y_{\phi_X^t(m)}(g_t)$$

Alors :

$$\frac{1}{t}\left(\left((\phi_X^{-t})_*(Y)-Y\right)_m(f)\right)=\frac{1}{t}\left(Y_{\phi_X^t(m)}(f)-Y_m(f)\right)+Y_{\phi_X^t(m)}(g_t)$$

$$=\frac{1}{t}\left(Y(f)\left(\phi_X^t(m)\right)-Y(f)(m)\right)+Y_{\phi_X^t(m)}(g_t)$$

Comme $t\mapsto\phi_X^t(m)$ est une courbe dont le vecteur vitesse en $t=0$ est $X(m)$, on a :

$$X_m(Y(f))=\lim_{t\to 0}\frac{(Y(f))(\phi_X^t(m))-Y(f)(m)}{t}$$

Ainsi :

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\left((\phi_X^{-t})_*(Y)-Y\right)_m(f)\right)=X_m(Y(f))+\lim_{t\to 0}Y_{\phi_X^t(m)}\,g_t$$

$$=X_m(Y(f))+Y_m\,g_0\underset{\text{d'après } g(0,u)=X(f)(u)}{=}X_m(Y(f))+Y_m(X(f))$$

$$=[X,Y](f).$$

<u>Thm</u>: Soient X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M et ϕ_X^t et ϕ_Y^s les flots associés. Alors les flots ϕ_X^t et ϕ_Y^s commutent si et seulement si le crochet $[X,Y]$ est nul.

<u>Dem</u>: • Pour $\phi_X^t\circ\phi_Y^s=\phi_Y^s\circ\phi_X^t \Rightarrow [X,Y]=0$ cf. exo 1 feuille 2 question 2e.

• Supposons que $[X,Y]=0$.

Le flot du champ de vecteurs $(\phi_X^t)_*Y$ est l'application $(s,m)\longmapsto\phi_X^{-t}\circ\phi_Y^s\circ\phi_X^{+t}(m)$. Par l'unicité du flot associé à un champ de vecteurs, il suffit de montrer que $(\phi_X^{-t})_*Y=Y$ (on aura alors $\phi_X^{-t}\circ\phi_Y^s\circ\phi_X^{+t}=\phi_Y^s$)

Or $\frac{d}{dt}_{|t=t_0}(\phi_X^{-t})_*Y=\frac{d}{dt}_{|t=t_0}\left(\phi_X^{-t_0}\circ\phi_X^{-t+t_0}\right)_*(Y)=(\phi_X^{-t_0})_*\left(\frac{d}{dt}_{|0}(\phi_X^{-t})_*Y\right)$

$$=(\phi_X^{-t_0})_*[X,Y]=0$$

Donc la fonction $t\mapsto(\phi_X^{-t})_*Y$ est constante, égale à Y.

2. Champs de vecteurs invariants à droite ou à gauche sur un groupe de Lie

Déf: Soit G un groupe de Lie. On appelle translation à gauche par $g \in G$ (resp. translation à droite) et on note L_g (resp. R_g) l'application :

$$L_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & \underset{\uparrow}{g \cdot h} \end{array}$$

produit dans le groupe G

$$\left(\text{resp. } R_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & h \cdot g \end{array}\right).$$

Rque: Si G est un groupe de Lie qui est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors L_g et R_g sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a :

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}} \quad \text{et} \quad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}.$$

Déf: Soit X un champ de vecteur sur un groupe de Lie G. On dit que X est invariant à gauche (resp. invariant à droite) si : $\forall g \in G$, $\forall h \in G$

$$DL_g(X(h)) = X(g \cdot h)$$

$$\left(\text{resp. } DR_g(X(h)) = X(\underset{\uparrow}{h \cdot g})\right)$$

produit du groupe G

Prop: Un champ de vecteur X sur un groupe de Lie G est invariant à gauche (resp. invariant à droite) si et seulement si $\forall g \in G$, $(L_g)_*(X) = X$ (resp. $(R_g)_*(X) = X$)

Dem: $(L_g)_*(X)(\underset{G}{\overset{}{h}}) = D_{g^{-1}h} L_g\left(X(g^{-1}h)\right) = X(h)$

définition de $f_* X$ où $f = L_g$ — invariance à g

Prop: Etant donné $v \in T_e G$ où e désigne l'élément neutre du groupe de Lie G, il existe un unique champ de vecteurs invariant à gauche (resp. invariant à droite) noté $\lambda^L(v)$ (resp. $\lambda^R(v)$) tel que

$$\lambda^L(v)(e) = v \qquad (\text{resp. } \lambda^R(v)(e) = v).$$

C'est un champ de vecteurs de classe C^∞.

Dem: on pose $\lambda^L(v)(\underset{\in G}{h}) = DL_h(\underset{\in T_e G}{v}) \in T_h G$

(l'invariance à gauche impose la valeur du champ de vecteur en $h \in G$ étant donné la valeur du champ de vecteur en e). On vérifie que $\lambda^L(v)$ ainsi défini est bien invariant à gauche : $\forall g \in G$ on a :

$$DL_g\left(\lambda^L(v)(h)\right) = DL_g \circ DL_h(v) = D(L_g \circ L_h)(v)$$
$$= D(L_{gh})(v) = \lambda^L(v)(gh)$$

Prop: Le crochet de deux champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) est invariant à gauche (resp. à droite).

Dem: On utilise que, pour f difféomorphisme,

$$f_*[X,Y] = [f_* X, f_* Y].$$

Ainsi: $(L_g)_*[X,Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$
$= [X, Y]$

idem en remplaçant "Left" par "right".

3. Définition et exemples d'algèbres de Lie

1.a. Structure d'algèbre de Lie de T_eG :

Soit G un groupe de Lie d'élément neutre $e \in G$.

Déf : On munit l'espace tangent $T_e G$ du crochet de Lie défini par :

$$[v, w] = \underbrace{[\lambda^L(v), \lambda^L(w)]}_{\text{crochet des champs de vecteurs invariants à gauche associés à } v \text{ et } w}(e)$$

où $v, w \in T_eG$.

Rque : Si on choisit les champs de vecteurs inv à d, on a le crochet inverse.

Déf : Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire :

$$\begin{aligned} [\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

telle que 1) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $[X, X] = 0$

2) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $0 = [X[Y, Z]] + [Y[Z, X]] + [Z, [X, Y]]$ (identité de Jacobi)

Rque : $(T_eG, [\,,\,])$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$. En effet, on a vu que l'espace tangent en un point d'une variété possède une structure naturelle d'espace vectoriel (réel). De plus le crochet d'un champ de vecteurs avec lui-même est nul ce qui implique 1). Le 2) est impliqué par l'identité de Jacobi appliquée aux champs de vecteurs $\lambda^L(X), \lambda^L(Y), \lambda^L(Z)$. que l'on évalue en $e \in G$. Il reste à vérifier la bilinéarité du crochet. Pour cela on utilise

$$[\lambda^L(X), \lambda^L(Y)] = -[\lambda^L(Y), \lambda^L(X)]$$

et

$$\begin{aligned} [D_1 + \lambda D_2, D_3](f) &= (D_1 + \lambda D_2) \circ D_3 f - D_3 \circ (D_1 + \lambda D_2)(f) \\ &= D_1 \circ D_3(f) + \lambda D_2 \circ D_3 f - D_3 \circ D_1(f) - \lambda D_3 \circ D_2(f) \\ &= [D_1, D_3](f) + \lambda [D_2, D_3](f) \end{aligned}$$

où D_1, D_2, D_3 sont des dérivations sur $\mathcal{C}^\infty(G)$.

b. Calcul du crochet dans $GL(n, \mathbb{C})$:

Rappel: On a vu que $GL(n, \mathbb{C})$ est un ouvert de $M(n, \mathbb{C})$. On en déduit que l'espace tangent à $GL(n, \mathbb{C})$ en la matrice identité $I \in GL(n, \mathbb{C})$ s'identifie à $M(n, \mathbb{C})$ par l'application

$$T_I GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$$

$$v = [A, (GL(n, \mathbb{C}), id)]_\sim \longmapsto A$$

Rque: Le champ de vecteur invariant à gauche qui vaut $A \in M(n, \mathbb{C})$ en I est donné par:

$$\lambda^L(A)(g) = \underbrace{gA}_{\text{produit des matrices } g \in GL(n,\mathbb{C}) \text{ et } A \in M(n,\mathbb{C})}$$

Prop: Le flot du champ de vecteurs invariant à gauche $\lambda^L(A)$ sur $GL(n,\mathbb{C})$ est: $\phi_A^t(g) = g \exp tA$ où
$\exp tA = I + (tA) + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^n}{n!} + \dots$
est l'exponentielle de la matrice $A \in M(n, \mathbb{C})$.

Dem: . $\phi_A^0(g) = g \exp(0A) = g \cdot I = g$

. $\frac{\partial \phi_A^t}{\partial t}_{|t=t_0}(g) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} g \exp tA = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} g \exp t_0 A \exp (t-t_0)A$

$= g \exp t_0 A \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp tA = g \exp t_0 A . A = \lambda^L(A)(g \exp t_0 A)$

$= \lambda^L(A)(\phi_A^{t_0}(g))$

Prop: Le crochet de Lie de l'algèbre de Lie $T_I G \simeq M(n, \mathbb{C})$ est donné par:

$$[\,,\,] : M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$$

$$(A, B) \longmapsto \underbrace{AB}_{\text{produit des matrices}} - BA$$

Dem: On utilise l'identification du crochet de champs de vecteurs avec la dérivée de Lie :

$$[A,B] := [\lambda^L(A), \lambda^L(B)](I) = \mathcal{L}_{\lambda^L(A)} \lambda^L(B)(I)$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi_A^{-t})_* (\lambda^L(B))(I)$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} D\phi_A^{-t}\Big(\underbrace{\lambda^L(B)(\phi_A^t(I))}\Big)$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} D\phi_A^{-t}\Big(\underbrace{\phi_A^t(I).B}_{\text{produit de matrices}}\Big)$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} D\phi_A^{-t}(\exp tA.B)$$

Or la différentielle de l'application $\phi_A^{-t} : G \longrightarrow G$ en $g \in G$ est donnée par :

$$D_g \phi_A^{-t}(X) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \phi_A^{-t}\Big(\underbrace{g+sX}_{\substack{\text{Courbe dans } \mathcal{M}(n,\mathbb{C}) \\ \text{tangente au vecteur } X \\ \text{contenue dans } GL(n,\mathbb{C}) \\ \text{pour } t \text{ voisin de } 0.}}\Big)$$

$$= \frac{d}{ds}_{|s=0} (g+sX)\exp(-tA)$$

$$= \underbrace{X.\exp(-tA)}_{\text{produit de matrices}} = DR_{\exp(-tA)}(X)$$

Ainsi $\mathcal{L}_{\lambda^L(A)} \lambda^L(B)(I) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\big(\exp tA . B . \exp -tA\big)$

$$= AB - BC$$

c. Immersion, plongement, submersion revisités :

Prop : Soit $f : N^n \longrightarrow M^p$ une application différentiable entre deux variétés et $y \in M$. On suppose que f est une submersion en tous points de $f^{-1}(y)$. Alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de N dont l'espace tangent en $x_0 \in f^{-1}(y)$ est le noyau de la différentielle de f en x :

$$T_{x_0}\left(f^{-1}(y)\right) = \operatorname{Ker} D_x f$$

Dem : D'après la forme canonique des submersions il existe
- une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ de N avec $x \in \mathcal{U}$
- une carte $(\mathcal{U}', \varphi')$ de M avec $f(x) = y \in \mathcal{U}'$

telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$ (sinon on remplace $\mathcal{U}$ par l'ouvert $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{U}')$)

et $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\varphi(\mathcal{U})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^p}{\underset{\cap}{\varphi'(\mathcal{U}')}}$

$$(x_1, \dots, x_p, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_p)$$

De plus, quitte à composer φ' avec une translation de $\mathbb{R}^p$, on peut supposer que $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x_0)) = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}$

Alors $\varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(y)) = \{(0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n) \in \varphi(\mathcal{U})\}$
$= \varphi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^{n-p}$

et $D_{\varphi(x_0)}(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}) : T_{\varphi(x_0)}\varphi(\mathcal{U}) \longrightarrow T_{\vec{0}}\varphi'(\mathcal{U}')$

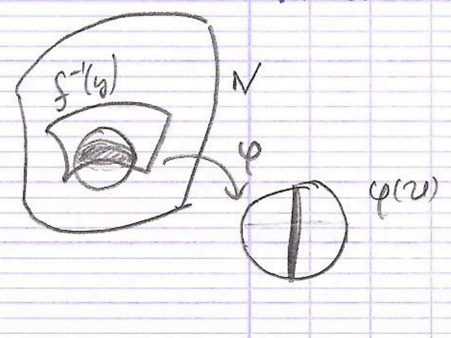
$$(v_1, \dots, v_p, \dots, v_n) \longmapsto (v_1, \dots, v_p).$$

Ainsi : $T_{x_0} f^{-1}(y) = \left\{ [\vec{v} \in \mathbb{R}^n, (\mathcal{U}, \varphi)]_N \text{ , } \vec{v} \text{ vecteur tgt à } \varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(y)) \right\}$

$= \left\{ [\vec{v} = (\overbrace{0, \dots, 0}^{p \text{ zéros}}, v_{p+1}, \dots, v_p), (\mathcal{U}, \varphi)]_N \right\}$

$= \left\{ [\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)]_N \text{ tq } D_{x_0} f([\vec{v}, (\mathcal{U}, \varphi)]_N) = 0 \in T_y M \right\}$

$= \operatorname{Ker} D_{x_0} f.$



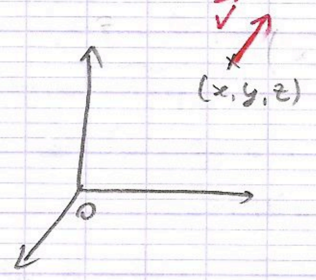
Exemples:

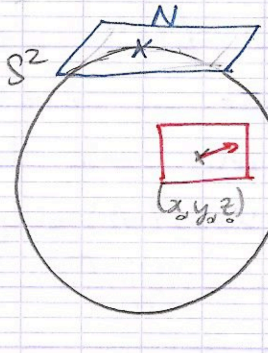
1) $S^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 , \|\vec{v}\| = 1\} = R^{-1}(\{1\})$

où $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une submersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

$(x,y,z) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

L'espace tangent à $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des vecteurs vitesse de courbes γ en $t=0$ avec $\gamma(0) = (x,y,z)$. C'est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on a encrés en (x,y,z). L'espace tangent à S^2 en $(x,y,z) \in S^2$ est le sous-ensemble de l'espace tangent à $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs vitesse en $t=0$ de courbe γ contenues dans S^2 avec $\gamma(0) = (x,y,z)$.





$$D_{(x_0,y_0,z_0)}R : \mathbb{R}^3 \simeq T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathbb{R}^3 \longrightarrow T_1\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xv_1 + yv_2 + zv_3)$$

$$\operatorname{Ker} D_{(x_0,y_0,z_0)}R = \{ v \in T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathbb{R}^3 \mid D_{(x_0,y_0,z_0)}R(v) = 0 \in T_1\mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ tq } xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \right\}$$

En particulier $T_N S^2 = \{z = 0\}$

2) $SL(n,\mathbb{C}) = \det^{-1}(\{1\})$

$T_I SL(n,\mathbb{C}) =: \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} D_I \det = \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$

$= \{ A \in M(n,\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} A = 0 \}$

3) $O(n,\mathbb{C}) = f^{-1}(I)$ où $f : M \longrightarrow M^T M$

$T_I O(n,\mathbb{C}) =: \mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} D_I f$

$= \{ A \in M(n,\mathbb{C})$ tel que $A^T + A = 0 \}$ matrices anti-symétriques

<u>Prop:</u> Soit $f : N^n \longrightarrow M^p$ un plongement. Alors $f(N)$ est une sous-variété de M dont l'espace tangent en $m \in f(N)$ est $T_m f(N) = \mathrm{Im}\, D_{f^{-1}(m)} f$.

<u>Dem:</u> Il existe une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ en $f^{-1}(m)$ et une carte $(\mathcal{U}', \varphi')$ en m avec $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$ tq

$$i = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\varphi(\mathcal{U})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^p}{\underset{\cap}{\varphi'(\mathcal{U}')}}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-n \text{ coord nulles}})$$

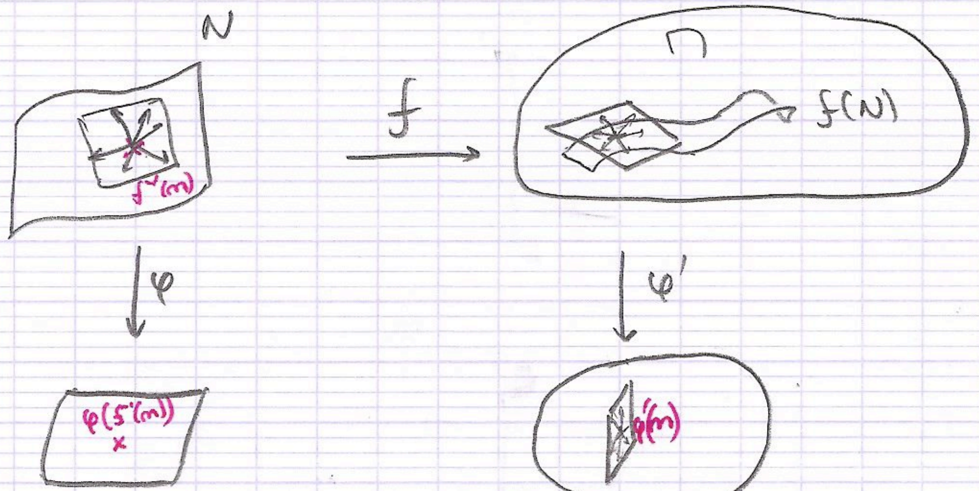
$$\forall u \in \mathcal{U}, \text{ on a } \varphi'(f(u)) = i \circ \varphi(u) \subset \varphi'(\mathcal{U}') \cap \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{dernières coord. nulles}}$$

<u>De plus</u> f est un homéomorphisme sur son image (pour la topologie induite sur $f(N)$ par M) Ainsi $f(\mathcal{U})$ est un ouvert de $f(N)$, c'est-à-dire de la forme $V \cap f(N)$ où V est un ouvert de M. Si on restreint φ' à $V \cap \mathcal{U}' = W$ on obtient une carte (W, φ') en $m \in f(N)$ telle que :

$$\varphi'(W \cap f(N)) = \varphi'(W) \cap \mathbb{R}^n.$$

On a : $D_{\varphi(f^{-1}(m))} \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\wr\wr}{T_{\varphi(f^{-1}(m))}\varphi(\mathcal{U})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^p}{\underset{\wr\wr}{T_{\varphi'(m)}\varphi'(W)}}$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto (v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$$



$$T_m f(N) = \{ [\vec{v}, (W, \varphi')]_\sim \text{ tq } \vec{v} \in \mathrm{Im}\, D_{\varphi(f^{-1}(m))} \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} \}$$
$$= \{ D_{f^{-1}(m)} f(w),\ w = [\vec{w}, (\mathcal{U}, \varphi)] \}$$

<u>Exemple:</u> $S^2 \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^3$

hémisphère nord

$$\begin{array}{l} \downarrow \varphi_1 \quad \text{carte au voisinage de } N = (0,0,1) \\ \mathbb{R}^2 \\ \ \ \cup\!\!\!\! \cdot \\ (u,v) \xmapsto{i \circ \varphi_1^{-1}} \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right) \end{array}$$

$$D_{(0,0)}(i \circ \varphi_1^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_N S^2 = \mathrm{Im}\, D_N i \subset T_{i(N)} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$$

$$[\vec{v}, (\mathbb{R}^3, id)]_N \longmapsto \vec{v}$$

$$= \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ z = 0 \}.$$

⚠ Bien que S^2 soit mon exemple favori de variété, il n'y a pas moyen d'en faire un groupe de Lie. En fait les seules sphères $S^n = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{v}\| = 1 \}$ qui ont une structure de groupes de Lie sont

S^1 = groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$

et S^3 = groupe des quaternions de norme 1.

cf Samelson, H. Über die Sphären die als Gruppenräume auftreten, Comment. Math. Helv., 13 (1940) p 144-155.