Chapitre 3 : Application exponentielle d'un groupe de Lie

1. Equations différentielles et sous-groupes à un paramètre

G groupe de Lie

Déf : Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie G est un homomorphisme de groupes (de classe $\mathcal{C}^\infty$) du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe G, i.e. une application γ $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant : $\gamma(\underbrace{s+t}_{\text{somme dans } \mathbb{R}}) = \underbrace{\gamma(s).\gamma(t)}_{\text{produit dans le groupe } G}$

Exemples :

1) L'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est un sous-groupe à un paramètre du groupe $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ car $\exp(t+s) = \exp t \exp s$.

2) Etant donnée une matrice $A \in M(n, \mathbb{C})$, l'application $t \mapsto \exp tA := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ est un sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{C})$.

Rappel : Prop : Soient A et B deux matrices de $M(n, \mathbb{C})$ telles que $[A, B] = AB - BA = 0$. Alors

$$\exp(A+B) = \exp A . \exp B$$

Dem :

$$\exp A \exp B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! \cdot m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n \quad \text{car} \quad AB = BA.$$

⚠ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$\exp A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp A \exp B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\exp A+B = \exp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= P \exp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \exp A \exp B$

Rque fondamentale: Il existe des groupes de Lie qui ne peuvent pas être réalisés comme sous-groupe de Lie d'un $GL(n, \mathbb{C})$. C'est le cas par exemple du groupe $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & \bar{z} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}, \bar{z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right\}$

où le produit est le produit de matrices et la structure de variété celle de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$. cf feuille d'exo. 3

Thm d'Ado: Toute algèbre de Lie de dim. finie est une sous-algèbre de Lie de $M(n, \mathbb{C})$.

Rque: On a vu que si $A \in M(n, \mathbb{C})$ et si $\lambda^L(A)$ désigne le champ de vecteurs invariant à gauche qui vaut A en $I \in GL(n, \mathbb{C})$, alors le flot de $\lambda^L(A)$ est donné par $\Phi_A^t(g) = g \exp tA$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
En particulier, il est défini pour tout temps.

Déf: On dit qu'un champ de vecteur sur une variété M est complet ssi $\forall m_0 \in M$ la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \phi(0) = m_0 \\ \phi'(t) = X(\phi(t)) \end{cases}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

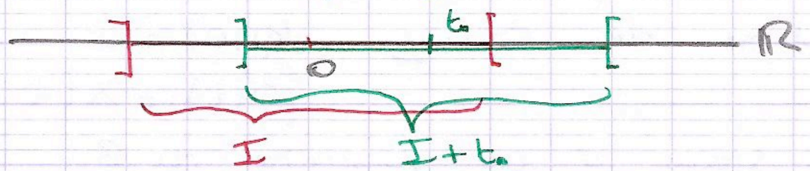
Ex: $\lambda^L(A)$ est complet, où $A \in M(n, \mathbb{C})$.

De manière générale, on a:

Prop: Soit G un groupe de Lie (réel) et X un champ de vecteur invariant à gauche sur G. Alors X est complet.

Dem: On utilise l'invariance à gauche pour prolonger les solutions: Soit $\phi(t)$ la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \phi(0) = e \\ \phi'(t) = X(\phi(t)) \end{cases}$ défini sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Soit $\begin{cases} t_0 > 0 \\ t_0 \in I \end{cases}$. On va prolonger ϕ à $I \cup (I + t_0)$:



Pour $t_0 \in I$ fixé, $\phi(t)$ est également solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \varphi(t_0) = \phi(t_0) \\ \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \end{cases}$

Une autre solution de ce problème, définie pour $t \in t_0 + I$, est donnée par $\phi_1(t) = \phi(t_0)\,\phi(t - t_0)$.

En effet
- $\phi_1(t_0) = \phi(t_0)$
- $\phi_1'(t) = DL_{\phi(t_0)}\,\phi'(t - t_0) = DL_{\phi(t_0)}\,X(\phi(t - t_0))$
  $= X(\phi(t_0).\,\phi(t - t_0))$ par inv. à g.
  $= X(\phi_1(t))$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy $\phi_1(t) = \phi(t)$ sur l'intersection $I \cap (t_0 + I)$.

En prolongeant ϕ par ϕ_1 sur $(t_0 + I) \setminus I$, on obtient donc une fonction C^∞ qui est solution du problème de Cauchy initial $(*) \begin{cases} \phi(0) = e \\ \phi'(t) = X(\phi(t)) \end{cases}$

et qui est définie sur $I \cup (t_0 + I)$.

$\Rightarrow$ si $]a, b[$ est le domaine de définition de la solution maximale de $(*)$ alors $b = +\infty$. Le même raisonnement avec $t_0 < 0$ montre que $a = -\infty$.

Si on considère une autre condition initiale, on a : que la solution de $\begin{cases} \varphi(0) = g \\ \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \end{cases}$

est $g.\phi(t)$ où ϕ est la solution maximal de $(*)$.

Donc X est complet.

<u>Rque</u>: En passant on a montré que

$$\phi(t) = \phi(t_0).\,\phi(t - t_0)$$

ce qui revient à $\phi(t+s) = \phi(t).\,\phi(s)$.

Autrement dit, la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases}\phi(0) = e \\ \phi'(t) = X(\phi(t))\end{cases}$ est un sous-groupe à un paramètre de G.

Rque : la dérivée par rapport en temps est notée indifféremment $\dot{\gamma}$ ou γ'

Prop : Tout sous-groupe à un paramètre est la courbe intégrale d'un champ de vecteurs invariant à gauche passant par $e \in G$ en $t=0$.

Dem : Soit γ un sous-groupe à un paramètre de G. Posons $\dot{\gamma}(0) = X$. Alors
$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \frac{d}{ds}_{|s=0} \gamma(t+s) \\ &= \frac{d}{ds}_{|s=0} \gamma(t)\gamma(s) \\ &= DL_{\gamma(t)} \frac{d}{ds}_{|s=0} \gamma(s) \\ &= DL_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(0) = \lambda^L(\dot{\gamma}(0))(\gamma(t))\end{aligned}$$

Ainsi γ est solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases}\gamma(0) = e \\ \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))\end{cases}$$
où $X = \lambda^L(\dot{\gamma}(0))$

Conséquence : 1) On a trois interprétations de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{champs de vecteurs} \\ \text{invariant à gauche}\end{array}\right\} \longleftarrow T_eG \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{sous-groupes à} \\ \text{un paramètre}\end{array}\right\}$$

2) Tout sous-groupe à un paramètre de $GL(n,\mathbb{C})$ est de la forme $t \mapsto \exp tA$ pour une matrice $A \in M(n,\mathbb{C})$.

2. Définition de l'application exponentielle

Soit G un groupe de Lie réel. On note $\mathfrak{g} = \text{Lie } G = T_e G$ son algèbre de Lie.

Déf: L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est définie par $\exp_G(X) = \Phi_X(1)$ où Φ_X est la courbe intégrale du champ de vecteur invariant à gauche $\lambda^L(X)$ passant par $e \in G$ en $t = 0$.

Rque: Φ_X est la solution de $\begin{cases} \Phi_X(0) = e \\ \Phi_X'(t) = \lambda^L(X)(\Phi_X(t)) \end{cases}$

Comme $\lambda^L(X)$ est complet, la définition de exp a bien un sens, ie $1 \in \mathbb{R}$ appartient bien au domaine de définition de Φ_X (qui est $\mathbb{R}$).

Prop: $t \to \exp_G(tX)$ est le sous-groupe à un paramètre de vecteur tangent X en $t = 0$. Tout sous-groupe à un paramètre est de la forme $t \mapsto \exp tX$ pour un $X \in \text{Lie } G$.

Dem: $\exp_G(tX) = \Phi_{tX}(1) = \Phi_X(t)$ car $s \mapsto \Phi_X(st)$ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} \varphi(0) = e \\ \varphi'(s) = t\lambda^L(X)(\varphi(s)) \\ \quad = \lambda^L(tX)(\varphi(s)) \end{cases}$

et on a montré que $t \mapsto \Phi_X(t)$ est un sous-groupe à un paramètre.

Conséquence: $\exp_G((t+s)X) = \exp_G tX \cdot \exp_G sX$

$\exp_G(-tX) = (\exp_G tX)^{-1}$

Prop: Soit $f : H \longrightarrow G$ un morphisme de groupes de Lie. Alors $\forall X \in \text{Lie } H$

$$f(\exp_H(tX)) = \exp_G(t\, D_e f(X))$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] & G \\ \mathrm{Lie}(H) \arrow[u, "\exp_H"] \arrow[r, "D_e f"] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp_G"'] \end{tikzcd}$$

Rappel: Un morphisme de groupes de H dans G envoie toujours l'élément neutre de H sur l'élément neutre de G.

Dem: $t \to f(\exp_H(tX))$ est un sous-groupe à un paramètre de G car $f(\exp_H((t+s)X)) = f(\exp_H tX . \exp sX)$
$= f(\exp_H tX) . f(\exp(sX))$

car f est un morphisme de groupe. Sa dérivée en $t=0$ est $\frac{d}{dt}_{|t=0} f(\exp_H(tX)) = D_e f\left(\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_H(tX)\right) = D_e f(X)$

Ainsi $f(\exp_H(tX)) = \exp_G(t\, D_e f(X))$.

(= sous-groupe à un paramètre de G dont la dérivée en 0 est $D_e f(X)$).

Conséquence: Soit H un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Alors $\forall X \in \mathcal{L}ie(H)$

$$\exp_H(X) = \underbrace{\exp(X)}_{\text{exponentielle de matrices}} = I + X + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$

En effet, l'injection canonique $H \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ est un plongement car H est une sous-variété de $GL(n, \mathbb{C})$.
L'espace tangent à H en $e \in H$ s'identifie

au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, D_e i$ de $T_e\, GL(n, \mathbb{C}) \simeq M(n, \mathbb{C})$ formé de matrices $n \times n$ à coeff. complexes. De plus $t \mapsto \exp tX$ est le sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{C})$ ayant pour vecteur vitesse X en $t=0$.

Applications:

1) L'exponentielle d'une matrice de trace nulle est de déterminant 1 : $\forall X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\exp X \in SL(n, \mathbb{C})$.

2) L'exponentielle d'une matrice anti-symétrique à coefficients réels est orthogonale
$$\forall X = -X^T \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) \quad \exp X \in O(n, \mathbb{R})$$

3) L'exponentielle d'une matrice anti-hermitienne est unitaire : $\forall X = -X^* \in \mathfrak{u}(n)$, $\exp X \in U(n)$.

Thm: Soit G un groupe de Lie de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Alors:

1. L'application $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$
2. $T_e \exp = \mathrm{Id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
3. L'exponentielle est un difféomorphisme local d'un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$ dans un voisinage ouvert de $e \in G$.

Dem: 2. $T_e \exp_G : T_e \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow T_e G \simeq \mathfrak{g}$ et on a:

$$T_e \exp_G \underbrace{(X)}_{\substack{\text{vecteur vitesse en } t=0 \\ \text{de la courbe } t \mapsto tX}} = \underbrace{\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_G tX}_{\substack{\text{vecteur vitesse en } t=0 \\ \text{de la courbe } t \mapsto \exp tX}} = X.$$

3. Thm des fonctions implicites

1. Découle du thm de Cauchy avec paramètre :

Rappel: Soit $\Lambda \times \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F : \Lambda \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ ($F(\lambda, \cdot)$ est un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$ qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de λ). Pour un $u_0 \in \mathcal{U}$ fixé

On note $\varphi(\lambda, t)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, 0) = u_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\lambda, t) = F(\lambda, \varphi(\lambda, t)) \end{cases}$$

Alors le domaine de définition de φ est un ouvert D de $\Lambda \times \mathbb{R}$ et $\varphi : D \to \mathcal{U}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Version sur les variétés :

Soit Λ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et M^n une variété.
On se donne une application $F : \Lambda \times M^n \to TM$ une application $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire un champ de vecteur $F(\lambda, \cdot) : M \to TM$ dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ d'un paramètre λ, et un point $m_0 \in M$.
Alors la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, 0) = m_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\lambda, t) = F(\lambda, \varphi(\lambda, t)) \end{cases}$$

est défini sur un ouvert D de $\Lambda \times \mathbb{R}$ et $\varphi : D \to M$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Ici, on applique le thm à
$$F : \mathfrak{g} \times G \to TG, \quad (X, g) \mapsto D_e L_g (X)$$
qui est $\mathcal{C}^\infty$ car $g \mapsto DL_g$ est la dérivée partielle de la multiplication $m : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ par rapport à la deuxième variable,
et $F : (X, g) \xmapsto[(id, \partial_2 m)]{} (X, DL_g) \xrightarrow[\text{evaluation}]{} DL_g(X)$.

⚠ En général, l'exponentielle d'un groupe de Lie n'est ni injective, ni surjective

ex: 1) $\exp : i\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ n'est pas injective
$i\theta \mapsto e^{i\theta}$

2) exp est à valeurs dans la composante connexe de G contenant $e \in G$ (l'image d'un connexe par une application continue est connexe et $\mathfrak{g}$ est connexe)

3) même en se restreignant à la composante connexe on a pas forcement surjectivité.

ex: $\exp : \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \underbrace{GL^+(2,\mathbb{R})}_{\text{composante connexe de } GL(2,\mathbb{R})}$ pas surjective

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp(\mathfrak{M}(2,\mathbb{R}))$.

En effet, supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ tel que $\exp(X) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de X. Comme X est à coeff. réels $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$. De plus $e^{\lambda_1} = -1 = e^{\lambda_2}$ donc λ_1, λ_2 imaginaires purs différents de 0.
$\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow X$ diagonalisable $\Rightarrow \exp X$ diagonalisable ce qui n'est pas le cas.

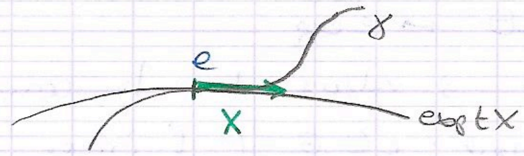
3. Théorème de Von Neumann: (ou thm de Cartan) ~1930

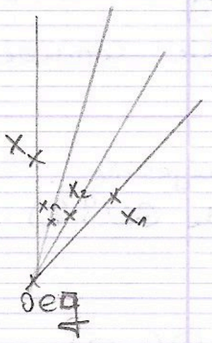
Thm: Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G. Alors H est un sous-groupe de Lie.

Le théorème veut dire que:
H sous-groupe + ensemble fermé ⟹ sous-variété de G

Tout gr topo connexe localement euclidien possède une (unique) structure différentiable qui en fait un gr de Lie C^∞, m C^ω
Gleason, Montgomery & Zippen 1952 cf Kaplansky

Lemme 1 : Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G et $\gamma : \mathbb{R} \to H$ une courbe contenue dans H tq $\gamma(0)=e$. Soit $X = \dot\gamma(0) \in \mathrm{Lie}(G)$. Alors $\exp tX \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$.





Lemme 2 : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'élement de $\mathrm{Lie}(G)$. Supposons que $X_i \to 0$ et que la suite des droites $\mathbb{R}X_i$ appartenant à l'espace projectif de $\mathrm{Lie}(G)$ tend vers une droite limite $\mathbb{R}X$. Si $\exp(X_i) \in H$ $\forall i \in \mathbb{N}$, alors $\exp \mathbb{R}X \subset H$.

Dem du lemme 2 :

Soit $Y \in \mathbb{R}X$. Alors $Y = \lim_{i\to\infty} n_i X_i$ pour une suite d'entiers n_i (avec $n_i \to +\infty$). Alors

$$\exp Y = \lim_{i\to+\infty} \exp(n_i X_i) \quad \text{car exp est continue}$$

$$= \lim_{i\to+\infty} \underbrace{(\exp X_i)^{n_i}}_{\in H} \in H \quad \text{car } H \text{ est \underline{fermé}}.$$

Dem du lemme 1 :

Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $e \in G$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$ tels que $\exp : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est un difféo. Comme $\gamma(0)=e$ et γ est continue, $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Donc il existe une suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers $0 \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t_i) = \exp X_i \in \mathcal{U}$, avec X_i uniquement déterminés. Alors $X_i \to 0$ et les droites $\mathbb{R}X_i \to \mathbb{R}\dot\gamma(0)$. Comme γ est à valeurs dans H, $\exp X_i \in H$ $\forall i \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 2, $\exp tX \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dem du théorème de Von Neumann :

Un candidat pour l'algèbre de Lie de H est

$$\mathfrak{h} = \{ X \in \text{Lie } G \mid \exp_G tX \in H \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

- $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de Lie G
  - par définition, $\forall X \in \mathfrak{h}$, $tX \in \mathfrak{h}$
  - Soient X et $Y \in \mathfrak{h}$. Alors $X + Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_G tX \exp_G tY$.

    Comme $t \mapsto \underbrace{\exp_G tX}_{\in H} \underbrace{\exp_G tY}_{\in H}$ est une courbe à valeurs dans H qui vaut $e \in G$ pour $t=0$, d'après le lemme 1, $X+Y \in \mathfrak{h}$.

- On cherche une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ au voisinage de $e \in G^n$ telle que $\varphi(\mathcal{U} \cap H) = \varphi(\mathcal{U}) \cap F$ où F est un sev de $\mathbb{R}^n$. On prend F un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans Lie(G) : Lie$(G) = \mathfrak{h} \oplus F$

  et on pose
  $$\psi : \text{Lie}(G) = \mathfrak{h} \oplus F \longrightarrow G$$
  $$(X, Y) \longmapsto \exp X \exp Y$$

  Alors $D_0 \psi = Id$ donc ψ est un difféomorphisme local. On pose $\varphi = \psi^{-1}$. Il reste à trouver un voisinage $\mathcal{U}$ de e dans G tel que $\varphi(\mathcal{U} \cap H) = \varphi(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{h}$.

  On raisonne par l'absurde : supposons que $\mathcal{U}$ n'existe pas. Alors dans tout voisinage $\mathcal{U}_i$ de e dans G il existe $h_i \in H$ s'écrivant $h_i = \exp_G X_i . \exp_G Y_i$ avec $X_i \in \mathfrak{h}$, $Y_i \in F$ et $Y_i \neq 0$. En prenant une suite de voisinage $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\cap \mathcal{U}_i = \{e\}$, on obtient une suite $(X_i, Y_i) \in \mathfrak{h} \times F$ tendant vers $(0,0)$ tq $\exp X_i \exp Y_i \in H \quad \forall i \in \mathbb{N}$ et $Y_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

  Or $\exp X_i \exp Y_i \in H$ et $\exp X_i \in H \Rightarrow \exp Y_i \in H \quad \forall i \in \mathbb{N}$

  Comme l'espace projectif de Lie(G) est homéomorphe à $S^n/\sim$ où $u \sim v \Leftrightarrow u = v$ ou $u = -v$, il est compact car la projection canonique $S^n \to S^n/\sim$ est continue (et l'image d'un compact par une application continue

est compact). Donc des droites $(\mathbb{R}Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergeante $(\mathbb{R}Y_{n_i}) \to \mathbb{R}Y$, $Y \neq 0$.
Par le lemme 2, on a $\exp \mathbb{R}Y \subseteq H$. Donc $Y \in \mathfrak{h}$.
Mais on a aussi $Y = \lim_{n_i \to +\infty} n_i Y_i$ (où n_i est une suite tendant vers $+\infty$) avec $n_i Y_i \in F$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Lie}(G)$ c'est un fermé de $\mathrm{Lie}(G)$ et $Y \in F$. Ainsi $Y \in F \cap \mathfrak{h} = \{\vec{0}\}$, ce qui contredit l'existence de la droite $\mathbb{R}Y$. Donc $\mathcal{U}$ existe et H est une sous-variété de G au voisinage de $e \in H$. Par translation à droite ou à gauche de la carte $(\mathcal{U}, \varphi)$, on obtient que H est une sous-variété de G au voisinage de n'importe quel point $h \in H$.

Application:
On retrouve sans effort que: les groupes suivants sont des sous-groupes de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$:

$SL(n,\mathbb{C}) = \det^{-1}(\{1\})$

$O(n,\mathbb{C}) = F_1^{-1}(\{I\})$ où $F_1 : GL(n,\mathbb{C}) \to M(n,\mathbb{C})$, $M \mapsto M^T M$

$Sp(n,\mathbb{C}) = F_2^{-1}(\{J\})$ où $F_2 : GL(n,\mathbb{C}) \to M(n,\mathbb{C})$, $M \mapsto M^T J M$

4. Morphismes de groupes de Lie et d'algèbres de Lie

a. Sous-groupes de Lie connexes:

But: Soit G un groupe de Lie. On va montrer que les sous-groupes de Lie connexes de G sont caractériser par leurs algèbres de Lie, i.e que l'application

$$\{\text{ss-groupe connexe } H \text{ de } G\} \longrightarrow \{\text{Sous-alg de Lie } \mathfrak{h} \text{ de } \mathrm{Lie}\,G\}$$

est injective.

Déf : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$. Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de $\mathfrak{g}$.

Ex : $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,\mathbb{C}),\ A^T = -A\}$ sous-algèbre de Lie de $(M(n,\mathbb{C}), \underbrace{[\,,\,]}_{\text{commutateur de matrices}})$

car $[A,B]^T = (AB - BA)^T = B^TA^T - A^TB^T = -[A,B]$ dès que A et $B \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$.

Déf : Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ deux algèbres de Lie sur un même corps $\mathbb{K}$. Un morphisme d'algèbres de Lie $F : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ est une application linéaire telle que :

$$F([A,B]) = [F(A), F(B)] \quad \forall A, B \in \mathfrak{h}.$$

Déf : Soient H et G deux groupes de Lie sur $\mathbb{K}$. Un morphisme de groupes de Lie $f : H \to G$ est une application différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) telle que $f(g.h) = f(g).f(h)$ $\forall g, h \in H$ (i.e. f est un morphisme de groupes).

Prop : Soient H, G deux groupes de Lie et $f : H \to G$ un morphisme de groupes de Lie. Alors $D_{e_H}f : \mathrm{Lie}(H) =: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Rappels :

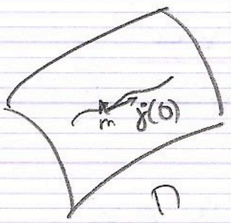
1) $f(e_H) = e_G$ car $f(e_H . e_H) = f(e_H) = f(e_H).f(e_H)$
$\to f(e_H) = e_G$ par multiplication à gauche par $f(e_H)^{-1}$.

2) Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, φ une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ et X_m un vecteur $\in T_m\mathcal{O} \simeq \mathbb{R}^n$

alors $$\underbrace{X_m(\varphi)}_{\text{dérivé de } \varphi \text{ en } m \text{ le long de } X_m} = D_m\varphi(X_m) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi(\underbrace{m + tX_m}_{\text{droite passant par } m \text{ de vecteur directeur } X_m})$$

$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi \circ \gamma(t)$$

où γ est n'importe quelle courbe passant par m en $t=0$ avec un vecteur vitesse égal à X_m.



Sur une variété M, on n'a pas de notion de droite passant par un point m avec un vecteur vitesse donné, mais on a bien que
$$X_m(\varphi) = D_m\varphi(X_m) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi \circ \gamma(t)$$
où $\gamma(0) = m$ et $\dot\gamma(t) = X_m$.

En particulier, si X est un champ de vecteurs sur M et ϕ_X^t son flot, on a $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$
$$X_m(\varphi) = D_m\varphi(X_m) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi \circ \phi_X^t(m)$$
car $\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \phi_X^t(m) = X(\phi_X^0(m)) = X_m$.

3) Le crochet de deux champs de vecteurs X et Y sur une variété M agit sur $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ par la dérivation :
$$[X,Y]_m(\varphi) = X_m(Y(\varphi)) - Y_m(X(\varphi)) \quad , m \in M$$
En particulier, si ϕ_X^t et ϕ_Y^s désignent les flots de X et Y respectivement, on a :
$$[X,Y]_m(\varphi) = \left(\frac{d}{dt}_{|t=0} Y(\varphi) \circ \phi_X^t(m)\right) - \left(\frac{d}{ds}_{|s=0} X(\varphi) \circ \phi_Y^s(m)\right)$$

$$[X,Y]_m(\varphi) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0}\Big(\varphi \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t(m)\Big)$$
$$- \frac{d}{ds}_{|s=0} \frac{d}{dt}_{|t=0}\Big(\varphi \circ \phi_X^t \circ \phi_Y^s(m)\Big)$$

En particulier, si X et Y sont des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G, $X = \lambda^L(A)$, $A \in \mathrm{Lie}\, G$
$Y = \lambda^L(B)$, $B \in \mathrm{Lie}\, G$

alors $\phi_X^t(g) = g \exp_G tA$
$\phi_Y^s(g) = g \exp_G tB$

et $[A,B] = [\lambda^L(A), \lambda^L(B)](e_G)$

$$[A,B](\varphi) = [\lambda^L(A), \lambda^L(B)]_{e_G}(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G,\mathbb{R})$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi \circ \phi_Y^s(\exp_G tA)$$
$$- \frac{d}{ds}_{|s=0} \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi \circ \phi_X^t(\exp_G sB)$$

$$\boxed{[A,B](\varphi) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi(\exp_G tA \cdot \exp_G sB) - \frac{d}{ds}_{|s=0} \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi(\underbrace{\exp_G sB \cdot \exp_G tA}_{\text{produit dans le groupe}})} \quad (*)$$

4) Si $f : H \to G$ est un morphisme de groupes de Lie, $\forall X \in \mathrm{Lie}\, H$, $\boxed{f(\exp_H tX) = \exp_G(t D_e f(X)). \ (**)}$

Dem de la proposition:

Il s'agit de montrer que si $f : H \to G$ est un morphisme de groupes de Lie alors:

$$D_{e_H} f([A,B]) = [D_{e_H} f(A), D_{e_H} f(B)] \quad \forall A,B \in \mathrm{Lie}(H)$$

On a $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G,\mathbb{R})$

$$[D_{e_H} f(A), D_{e_H} f(B)](\varphi) = \left[\lambda^L(D_{e_H} f(A)), \lambda^L(D_{e_H} f(B))\right]_{e_G}(\varphi)$$

$$
\begin{aligned}
[D_{e_H} f(A), D_{e_H} f(B)] &\overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}_{|(0,0)} \varphi\left(\exp_G tD_{e_H} f(A) \cdot \exp_G sD_{e_H} f(B)\right) \\
&\quad - \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}_{|(0,0)} \varphi\left(\exp_G sD_{e_H} f(B) \cdot \exp tD_{e_H} f(A)\right) \\
&\overset{(**)}{=} \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}_{|(0,0)} \varphi\left(f(\exp_H tA) \cdot f(\exp_H sB)\right) \\
&\quad - \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}_{|(0,0)} \varphi\left(f(\exp_H sB) \cdot f(\exp_H tA)\right) \\
&\underset{\text{de groupes}}{\overset{f\text{ morphisme}}{=}} \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}_{|(0,0)} \varphi \circ f\left(\exp_H tA \cdot \exp_H sB\right) \\
&\quad - \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}_{|(0,0)} \varphi \circ f\left(\exp_H sB \cdot \exp_H tA\right) \\
&\overset{(*)}{=} [A,B](\varphi \circ f) = D_{e_H}(\varphi \circ f)([A,B]) \\
&= D_{e_G}\varphi \circ D_{e_H} f([A,B]) = D_{e_H} f([A,B])(\varphi)
\end{aligned}
$$

Prop: Soit G un groupe topologique connexe (i.e. un espace topologique connexe muni d'une structure de groupe telle que la multiplication et l'inversion sont continues) Soit U un voisinage ouvert de $e_G \in G$. Alors le groupe G est engendré par U : $\forall g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}, h_1, \dots, h_n \in U$ tels que

$$g = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n$$

Corollaire : Soit G un groupe de Lie connexe. Tout élément $g \in G$ s'écrit $g = \exp_G X_1 \exp_G X_2 \cdots \exp_G X_k$ avec $X_1, \dots, X_k \in \mathrm{Lie}(G)$.

Dem de la proposition:

Soit U un voisinage de $e_G \in G$ et $\mathrm{inv}(U) = \{g^{-1}, g \in U\}$.

On pose $U' = U \cap \mathrm{inv}(U)$ ouvert non vide car $\exists e_G$.
Soit $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (U')^k$ où $(U')^k = \{h_1 \dots h_k,\ h_i \in U'\}$.
le sous-groupe engendré par U'. Alors H est un ouvert de G comme réunion d'ouverts.
D'autre part si on considère la relation d'équivalence sur G donnée par $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H$ tq $g_1 = g_2 h$,
alors G se décompose en classes d'équivalence
$$G = \bigcup_{g \in G} gH = H \cup \left(\bigcup_{g \notin H} gH \right)$$

Comme la multiplication de G est continue de même que l'inversion, on a $gH = \underbrace{(L_{g^{-1}})^{-1}(H)}_{\text{image réciproque de } H \text{ par la translation à gauche par } g^{-1}}$ ouvert de G

Ainsi $H = G \setminus \bigcup_{g \notin H} gH$ est un fermé de G.
Comme G est connexe, les seules ensembles ouverts et fermés de G sont $\emptyset$ et G. Comme H contient e_G, on a $H = G$.

<u>Prop:</u> Soit G un groupe de Lie connexe et $f, f' : G \to H$ deux morphismes de groupes de Lie tels que $D_{e_G} f = D_{e_G} f'$. Alors $f = f'$.

<u>Dem:</u>
$$\begin{array}{ccc} G & \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} & H \\ {\scriptstyle \exp_G}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp_H} \\ \mathrm{Lie}\, G & \xrightarrow[D_{e_G} f = D_{e_G} f']{} & \mathrm{Lie}\, H \end{array}$$

$\forall g \in G$, $\exists k \in \mathbb{N}$ et $X_1, \dots, X_k \in \mathrm{Lie}(G)$ tq
$g = \exp_G X_1 \dots \exp_G X_k$. Alors $f(g) = f(\exp_G X_1 \dots \exp_G X_k)$
$$\begin{aligned} f(g) &= f(\exp_G X_1) . f(\exp_G X_2) \dots f(\exp_G X_k) \\ &\overset{(**)}{=} \exp_H (D_{e_G} f(X_1)) . \exp_H (D_{e_G} f(X_2)) \dots \exp_H (D_{e_G} f(X_k)) \\ &= \exp_H (D_{e_G} f'(X_1)) \dots \exp_H (D_{e_G} f'(X_k)) \overset{(**)}{=} f'(\exp_G X_1) \dots f'(\exp_G X_k) \\ &= f'(g) \end{aligned}$$

<u>Prop:</u> Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe de Lie de G alors :

a. $\mathrm{Lie}(H) = \{ X \in \mathrm{Lie}(G) \mid \exp_G(\mathbb{R}X) \subset H \}$

b. Si H est connexe, il est engendré par $\exp_G(\mathrm{Lie}(H))$

<u>Dem:</u> On a :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook] & G \\ \mathrm{Lie}(H) \arrow[u, "\exp_H"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp_G"'] \end{tikzcd} \qquad \exp_{G|\mathrm{Lie}(H)} = \exp_H$$

a. $\subseteq$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(H)$, $\exp_H(tX) = \exp_G(tX) \in H$

$\supseteq$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(G) \mid \exp_G(tX) \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}$ alors

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \underbrace{\exp_G tX}_{\in H} = X \in \mathrm{Lie}(H).$$

b. H connexe est engendré par $\exp_H(U)$ où U est un voisinage de $0 \in \mathrm{Lie}(H)$ et $\exp_H(U) = \exp_G(U)$.

<u>Corollaire:</u> Un sous-groupe de Lie H connexe d'un groupe de Lie G est entièrement déterminé par $\mathrm{Lie}(H) \subseteq \mathrm{Lie}(G)$, ie. l'application

$$\begin{aligned} \{\text{ss-groupe de Lie connexe}\} &\longrightarrow \{\text{sous-algèbre de Lie}\} \\ H &\longmapsto \mathrm{Lie}\, H \end{aligned}$$

est injective.

b. Conjugaison et crochet :

Soit G un groupe de Lie. Pour tout $g \in G$ on note c_g la conjugaison par g dans G :

$$c_g : \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

La différentielle de c_g en $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est l'application

$$\mathrm{Ad}(g) := D_e c_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$A \longmapsto \frac{d}{ds}_{|s=0} g \cdot \exp_G sA \cdot g^{-1}$$

En particulier $\mathrm{Ad}(g)$ est inversible, d'inverse $\mathrm{Ad}(g^{-1})$.

Déf: L'application
$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$
$$g \longmapsto D_e c_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$A \mapsto \frac{d}{ds}_{|s=0} g \cdot \exp sA \, g^{-1}$$

est un morphisme de groupe appelé représentation Adjointe de G et on a $\boxed{\exp_G(\mathrm{Ad}(g)(X)) = g \exp_G(X) g^{-1}}$

Prop: La différentielle en $e_G \in G$ de l'application Adjointe
$$T_e \mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \text{ est le crochet}$$
$$X \longmapsto [X, \cdot] =: \mathrm{ad}(X).$$

Dem: On a : $(*)$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G, \mathbb{R})$
$$[X,Y](\varphi) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi(\exp_G tX . \exp_G sY) - \varphi(\exp_G sY \exp_G tX)$$

D'autre part :
$$T_e \mathrm{Ad}(X)(Y) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \mathrm{Ad}(\exp_G sX)(Y) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_G sX \exp_G tY \exp_G -sX$$

et
$$T_e \mathrm{Ad}(X)(Y)(\varphi) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi(\underbrace{\exp_G sX \exp_G tY \exp_G(-sX)}_{h(s,t,-s)})$$

où $h(s,t,u) = \varphi(\exp_G sX \exp_G tY \exp_G uX)$ $\mathcal{C}^\infty$

$$T_e \mathrm{Ad}(X)(Y)(\varphi) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0} \varphi(\exp_G sX \exp_G tY \exp_G(-sX))$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\frac{\partial h}{\partial x}(0,t,0) - \frac{\partial h}{\partial z}(0,t,0) \right)$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\frac{d}{ds}_{|s=0} h(s,t,0) - \frac{d}{ds}_{|s=0} h(0,t,s) \right)$$
$$= \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0} \left(\varphi(\exp_G sX \exp_G tY) - \varphi(\exp_G tY \exp_G sX) \right)$$

Corollaire :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \exp_G \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \text{exponentielle des endomorphismes} \\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{Ad}(\exp_G tX) = e^{t\,\mathrm{ad}X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\,\mathrm{ad}X)^k}{k!}$$

où $(\mathrm{ad}X)^k = \underbrace{\mathrm{ad}X \circ \dots \circ \mathrm{ad}X}_{k \text{ fois}}$.

Dem : Si G est de dimension n, on a : $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$
et $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$
$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \simeq GL(n, \mathbb{R})$
et dans ce cas l'exponentielle est l'exponentielle des matrices.

Application : $P \exp X P^{-1} = \exp PXP^{-1}$ et $\exp X . Y . \exp -X = e^{\mathrm{ad}X}(Y)$.

5. Différentielle de l'exponentielle d'un groupe de Lie

Thm : Soit G un groupe de Lie, et $X, Y \in \mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$.
Alors

1) $$D_X \exp_G(Y) = D_e R_{\exp_G(X)} \left(\frac{e^{\mathrm{ad}X} - 1}{\mathrm{ad}X}(Y) \right)$$

2) $$D_X \exp_G(Y) = D_e L_{\exp_G(X)} \left(\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}(Y) \right)$$

Dem du 1) :
L'application $\mathrm{ad}X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $Y \mapsto [X, Y]$ est une application linéaire sur $\mathfrak{g}$ de norme $|||\mathrm{ad}X||| = \sup_{\|Y\| \leq 1} \|[X, Y]\|$ où $\|.\|$ est n'importe quelle norme sur $\mathfrak{g} = T_e G \simeq \mathbb{R}^n$.

Alors $|||(\mathrm{ad}\,X)^k||| \leq |||\mathrm{ad}\,X|||^k$ et la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}\,X)^k}{k!}$ est normalement convergente car

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\left|\left| \frac{(\mathrm{ad}\,X)^k}{k!} \right|\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|||\mathrm{ad}\,X|||^k}{k!} = e^{|||\mathrm{ad}\,X|||} < +\infty$$

Par conséquent elle converge vers une application linéaire notée $e^{\mathrm{ad}\,X} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{ad}\,X)^k}{k!}$.

De plus on a : $\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\,\mathrm{ad}\,X)^k}{k!} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(s\,\mathrm{ad}\,X)^k}{k!} ds$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 e^{s\,\mathrm{ad}\,X} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}\,X)^k}{(k+1)!} = \frac{e^{\mathrm{ad}\,X} - 1}{\mathrm{ad}\,X}$$

Il faut montrer que :

$$\underbrace{\left(D_e R_{\exp_G X}\right)^{-1} D_X \exp_G(Y)}_{} = \frac{e^{\mathrm{ad}\,X} - 1}{\mathrm{ad}\,X}(Y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_G(X+tY)\exp_G(-X) = \int_0^1 e^{s\,\mathrm{ad}\,X}(Y)\,ds$$

Nous allons montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_G u(X+tY)\exp_G(-uX) = \int_0^u e^{s\,\mathrm{ad}\,X}(Y)\,ds$$

en utilisant que la fonction $f(u) = \int_0^u e^{s\,\mathrm{ad}\,X}(Y)\,ds$ est caractérisée par :

a) $f(0) = 0$

b) $f'(u) = e^{u\,\mathrm{ad}\,X}(Y)$.

Posons $\gamma(u,t) = \exp_G u(X+tY)\exp_G(-uX) \in G$

Nous allons montrer que $\frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t) = f(u)$.

a) $\gamma(0,t) = e_G \quad \forall t \in \mathbb{R}$ donc $\frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(0,t) = 0 \in \mathfrak{g}$

b) $\gamma(u,0) = e_G \quad \forall u \in \mathbb{R}$ donc $\frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t) \in T_eG \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Ainsi la courbe $u \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t)$ est à valeurs dans l'espace vectoriel $T_{e_G}G = \mathbb{R}^n$. Sa dérivée en $u \in \mathbb{R}$ vaut :

$$\frac{d}{du}\frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(u+s,t) - \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(u,t)\right)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\gamma(u,t)^{-1} \cdot \gamma(u+s,t)\right)\right)$$

car la différentielle de $\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g\,,\,h) & \longmapsto & h^{-1}g \end{array}$ en (e_G, e_G)

est l'application $\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (X, Y) & \longmapsto & X - Y \end{array}$.

Ainsi :

$$\frac{d}{du}\frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_G uX \exp_G s(X+tY) \exp_G(-sX) \exp_G(-uX)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\frac{d}{dt}_{|t=0} \underbrace{c_{\exp_G(uX)}}_{\text{conjugaison par } \exp_G(uX)} \left(\exp_G s(X+tY) \exp_G(-sX)\right)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} D_e c_{\exp_G(uX)}\left(\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_G s(X+tY) \exp_G(-sX)\right)$$

$D_e c_{\exp_G(uX)}$ continue et $D_e c_{\exp_G(uX)} = Ad(\exp_G(uX))$

$$= Ad(\exp_G(uX))\left(\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp s(X+tY) \exp_G(-sX)\right)$$

$$= e^{u\, ad X}\left(\frac{d}{du}_{|u=0}\frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t)\right)$$

$$= e^{u\, ad X}\left(\frac{d}{dt}_{|t=0}\frac{d}{du}_{|u=0} \exp u(X+tY) \exp(-uX)\right)$$

$$= e^{u\, ad X}\left(\frac{d}{dt}_{|t=0} D_e \exp(X+tY) - D_e \exp(X)\right)$$

$$= e^{u\, ad X}\left(\frac{d}{dt}_{|t=0} X + tY - X\right) = e^{u\, ad X}(Y).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(u,t) = f(u) = \int_0^u e^{s\, ad X}(Y)\, ds$$

<u>Corollaire</u> : L'exponentielle d'un groupe de Lie G est un difféomorphisme local en $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ si et seulement si

$$\det\left(\frac{e^{\mathrm{ad} X} - 1}{\mathrm{ad} X}\right) \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}\, X$ n'admet pas de valeurs propres de la forme $2i\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

<u>Dem</u> : Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$, alors les valeurs propres de $f(A)$, $A \in M(n, \mathbb{C})$ sont les $f(\lambda)$, λ valeurs propres de A. Donc les vp de $\frac{e^{\mathrm{ad} X} - 1}{\mathrm{ad} X}$ sont les $\frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}$ où λ vp de $\mathrm{ad} X$. On a $\frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda} = 0$ ssi $\lambda = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

<u>Exemple</u> :

$G = GL(n, \mathbb{C})$ $\qquad$ $\exp : M(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ difféo local en

$\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{C})$ $\qquad$ $X \in M(n, \mathbb{C})$ ssi $\lambda_i - \lambda_j \neq 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\forall \lambda_i, \lambda_j$ vp de X.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $X \in M(n, \mathbb{C})$ avec leurs multiplicités. On va déterminer les valeurs propres de

$$\mathrm{ad} X : M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$$
$$Y \mapsto [X, Y] = XY - YX$$

On peut supposer X triangulaire supérieure. Alors

$$[X, E_{ij}] = \begin{bmatrix} \ddots & & * & * \\ & \lambda_i - \lambda_j & & \\ & & \ddots & * \\ & & & \ddots \end{bmatrix} i$$
$$\qquad\qquad j$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \cdot & 5 & 3 \\ \cdot & & 6 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{ad} X$ devient triangulaire supérieure dans la base $E_{1n}, E_{1\,n-1}, E_{2n}, \dots, E_{n,1}$ et ses valeurs propres sont les $\lambda_i - \lambda_j$.

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda c & \lambda_1 b + \lambda d \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\lambda_1 & a\lambda + b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & c\lambda + d\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda c & (\lambda_1 - \lambda_2) b + \lambda(d - a) \\ c(\lambda_2 - \lambda_1) & -\lambda c \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} E_{12} & E_{11} & E_{22} & E_{21} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & -\lambda & \lambda & 0 \\ & 0 & 0 & \lambda \\ & & 0 & -\lambda \\ & & & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{12} \\ E_{11} \\ E_{22} \\ E_{21} \end{array} \end{array}$$

6. Formule de Campbell - Baker - Hausdorff et Thm de Thompson

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
En général $\exp_G X \exp_G Y \neq \exp_G (X+Y)$.
Par contre, comme l'exponentielle est un difféo local entre un vois de $0 \in \mathfrak{g}$ et un vois de $e_G \in G$, on peut trouver un voisinage U de $0 \in \mathfrak{g}$ et une application $H : U \times U \to \mathfrak{g}$ telle que

$$\boxed{\exp_G X . \exp_G Y = \exp_G H(X,Y).}$$

Thm (Formule de Baker - Campbell - Hausdorff)

On pose $\psi(z) = \frac{z}{z-1} \log z = z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^k}{k+1}$

Soient X et $Y \in U$, et $x = \mathrm{ad}\, X$, $y = \mathrm{ad}\, Y$. Alors

$$H(X,Y) = X \int_0^1 \psi\left(e^{\mathrm{ad} X} e^{t\, \mathrm{ad} Y}\right)(Y)\, dt$$

$$= X + \sum_{\substack{k,\, p_i,\, q_i \geq 0 \\ p_i + q_i > 0 \\ p_{k+1} \geq 0}} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{x^{p_1} y^{q_1} \cdots x^{p_k} y^{q_k} x^{p_{k+1}} (Y)}{(q_1 + q_2 + \cdots + q_k + 1)\, p_1! q_1! \cdots p_k! q_k! p_{k+1}!}$$

$$= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]]$$
$$- \frac{1}{24}[X[Y,[X,Y]]] + \cdots$$

__Dem:__ On peut supposer U étoilé. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $Z(t)$ par : $\exp_G Z(t) = \exp_G X \exp_G (tY)$.
Alors $Z(0) = X$ et $\frac{d}{dt} \exp Z(t) = D_{Z(t)} \exp_G (Z'(t))$

$$= D_e L_{\exp Z(t)} \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}\, Z(t)}}{\mathrm{ad}\, Z(t)} (Z'(t))$$

D'autre part : $\frac{d}{dt} \exp_G X \exp_G (tY) = D L_{\exp_G X} D L_{\exp_G tY} (Y)$

$$= D_e L_{\exp_G Z(t)} (Y)$$

Donc $Y = \frac{1-e^{-\operatorname{ad} Z(t)}}{\operatorname{ad} Z(t)} \left(Z'(t) \right)$

$$\Rightarrow \quad Z'(t) = \frac{\operatorname{ad} Z(t)}{1-e^{-\operatorname{ad} Z(t)}} (Y) = \frac{\log e^{\operatorname{ad} Z(t)}}{1-e^{-\operatorname{ad} Z(t)}} (Y)$$

$$= \frac{e^{\operatorname{ad} Z(t)}}{e^{\operatorname{ad} Z(t)} - 1} \log e^{\operatorname{ad} Z(t)} (Y) = \psi\left(e^{\operatorname{ad} Z(t)}\right)(Y)$$

Mais $e^{\operatorname{ad} Z(t)} = \operatorname{Ad}\left(\exp_G Z(t)\right) = \operatorname{Ad}\left(\exp_G X \exp_G (tY)\right)$

$$= \operatorname{Ad}(\exp_G X) \operatorname{Ad}(\exp_G tY)$$
$$= e^{\operatorname{ad} X} e^{t \operatorname{ad} Y}.$$

Corollaire : L'application $(X, Y) \longrightarrow H(X, Y)$ est analytique dans un voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$. Donc la multiplication de G est analytique dans un voisinage de 0 muni de la carte donné par l'exponentielle.

Dem : On a $H(X,Y) = Z_{(X,Y)}(1)$ où $Z_{X,Y}$ est solution du problème de Cauchy suivant

$$Z(0) = X$$
$$Z'(t) = \frac{\operatorname{ad} Z(t)}{1-e^{-\operatorname{ad} Z(t)}} (Y) = F(Y, Z(t))$$

Comme la condition initiale et $F(Y, \cdot)$ dépendent de manière analytique de (X, Y), il en est de même de $Z_{(X,Y)}(1)$.

Thm de Thompson (1986)

Soient A et B deux matrices hermitiennes de $M(n, \mathbb{C})$ (ie $A^* = A$, $B^* = B$). Alors il existe deux matrices unitaires U et V (i.e $U^{-1} = U^*$, $V^{-1} = V^*$) telles que

$$e^{iA} e^{iB} = e^{i(UAU^{-1} + VBV^{-1})}.$$

cf Proof of a conjectured exponential formula, R. C. Thompson
Linear and multilinear algebra, 1986, Vol 19 pp 187 - 197.