

# Chapitre 4: Action Adjointe et classes de similitude

## 1. Actions de groupes:

Déf: Une action (à gauche) d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $\Omega$  est la donnée d'une application de  $G \times \Omega$  dans  $\Omega$ ,  $(g, m) \mapsto g \cdot m$  telle que

- 1)  $e_G \cdot m = m$
- 2)  $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m \quad \forall m \in \Omega, \forall g_1, g_2 \in G.$

Rq: Etant donné une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $\Omega$ , on a une relation d'équivalence sur  $\Omega$  donnée par :

$$m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow \exists g \in G \mid g \cdot m_1 = m_2.$$

Cette relation d'équivalence donne une partition de  $\Omega$  en classes d'équivalence.

Déf: L'orbite d'un point  $m \in \Omega$  sous l'action d'un groupe  $G$  est la classe d'équivalence du point  $m$ , c'est-à-dire l'ensemble

$$G \cdot m = \{ g \cdot m \in \Omega \mid g \in G \} =: \mathcal{O}_m.$$

Le stabilisateur de  $m \in \Omega$  est le sous-groupe de  $G$  formé par les éléments  $g \in G$  tels que  $g \cdot m = m$ . Il est noté  $G_m = \{ g \in G \mid g \cdot m = m \}.$

On dit que  $G$  agit transitivement sur  $\Omega$  s'il n'y a qu'une seule orbite, c'est-à-dire si  $\forall m_1, m_2 \in \Omega, \exists g \in G \mid g \cdot m_1 = m_2.$

## Exemples d'actions de groupes:

- 0) Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on note  $G/H$  l'ensemble des classes d'équivalence par l'action de  $H$  sur  $G$  (à droite):

$$G \times H \longrightarrow G$$

$$(g, h) \longrightarrow gh$$

Un élément de  $G/H$  est un ensemble de la forme  $gH$  pour un  $g \in G$  donné.

Alors  $G$  agit sur  $G/H$  (à gauche) par:

$$G \times G/H \longrightarrow G/H$$

$$(g, g_0 H) \longrightarrow gg_0 H$$

- 1)  $G$  agit sur  $G$  par conjugaison:

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, h) \longrightarrow ghg^{-1}$$

- 2) Si  $G$  est un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $G$  agit sur  $\mathfrak{g}$  par action Adjointe:

$$G \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$(g, x) \longrightarrow \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \exp(tx) g^{-1}$$

Les orbites sont appelées orbites adjointes.

- 3) Dans le cas où  $G = GL(n, K)$  avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , l'action adjointe de  $GL(n, K)$  sur  $\mathfrak{n}(n, K) = \mathfrak{gl}(n, K)$  est l'action par conjugaison ou similitude:

$$GL(n, K) \times \mathfrak{n}(n, K) \longrightarrow \mathfrak{n}(n, K)$$

$$(P, \Pi) \longrightarrow P \Pi P^{-1}$$

Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables et les orbites sont appelées classes de similitude.

4)  $GL(n, \mathbb{K})$  agit aussi sur  $\mathcal{N}(n, \mathbb{K})$  par congruence:

$$GL(n, \mathbb{K}) \times \mathcal{N}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{N}(n, \mathbb{K})$$

$$(P, \mathcal{N}) \mapsto P \mathcal{N} P^T$$

C'est l'action naturelle sur les formes bilinéaires.

5)  $GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$  agit sur  $\mathcal{N}(n, \mathbb{K})$  par r-équivalence ou action de Steinitz:

$$(GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})) \times \mathcal{N}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{N}(n, \mathbb{K})$$

$$((P, Q), \mathcal{N}) \mapsto P \mathcal{N} Q^{-1}$$

6)  $GL(n, \mathbb{K})$  agit sur  $\mathcal{N}(n, \mathbb{K})$  par multiplication à gauche:

$$GL(n, \mathbb{K}) \times \mathcal{N}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{N}(n, \mathbb{K})$$

$$(P, \mathcal{N}) \mapsto P \mathcal{N}$$

Def. Soient  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  deux ensembles munis d'actions d'un même groupe  $G$ . Une application

$\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$  est dite  $G$ -équivariante

si et seulement si:  $\forall g \in G, \forall m \in \mathcal{N}$ :

$$\varphi(\underbrace{g \cdot m}_{\text{action de } g \in G \text{ sur } m \text{ dans } \mathcal{N}}) = \underbrace{g \cdot \varphi(m)}_{\text{action de } g \in G \text{ sur } \varphi(m) \text{ dans } \mathcal{N}'}$$

action de  $g \in G$   
sur  $m$  dans  $\mathcal{N}$

action de  $g \in G$   
sur  $\varphi(m)$  dans  $\mathcal{N}'$

Exemple: Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $\mathcal{N}$  alors la bijection canonique:

$$\varphi_m: G/G_m \longrightarrow G \cdot m = \mathcal{O}_m$$

$$g G_m \longmapsto g \cdot m$$

est  $G$ -équivariante par l'action de  $G$  sur  $G/G_m$  et l'action de  $G$  sur  $\mathcal{N}$ .

## 2. Ensemble des orbites:

Pour chaque action de groupe on cherche à caractériser l'ensemble des orbites soit en donnant un représentant privilégié de chaque orbite soit en déterminant un ensemble complet d'invariants.

### Exemples:

- 1) Pour l'action de  $GL(n, \mathbb{K})$  sur  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  par multiplication à gauche, on a:
- $$X \sim Y \Leftrightarrow \text{Ker } X = \text{Ker } Y \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) \text{ tq } PX = Y$$

L'ensemble des orbites est paramétré par les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  ( $\{\vec{0}\}$  correspond à l'orbite d'un élément inversible qui vaut  $GL(n, \mathbb{K})$ .)

- 2) Les orbites sous l'action de Steinitz
- $$GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$$
- $$((P, Q), X) \rightarrow PXQ^{-1}$$
- sont paramétrés par le rang et appelés classes de  $r$ -équivalence:
- $$X \sim Y \Leftrightarrow \text{rg } X = \text{rg } Y$$

$$\text{rg } X = r \Leftrightarrow \exists P, Q \in GL(n, \mathbb{K}) \text{ tq}$$
$$PXQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3)  $GL(n, \mathbb{K})$  agit sur  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  par congruence en laissant stable l'ensemble des matrices symétriques (matrice de formes bilinéaires symétriques) et l'ens. des matrices anti-symétriques (matrice de formes bilinéaires alternées).

$$GL(n, \mathbb{C}) \times \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{C})$$

$$(P, X) \longmapsto PXP^T$$

$$X \sim Y \Leftrightarrow \text{rg } X = \text{rg } Y$$

$$\text{rg } X = r \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{C}) \mid PXP^T = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par contre, les classes de  $GL(n, \mathbb{R})$ -congruence des matrices symétriques réelles sont paramétrées par la signature :

$$GL(n, \mathbb{R}) \times \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R})$$

$$(P, X) \longmapsto PXP^T$$

$$X \sim Y \Leftrightarrow \text{sg } X = \text{sg } Y$$

$$\text{sg } X = (p, q) \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{R}) \mid PXP^T = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les classes de congruence sous  $GL(n, \mathbb{K})$  de matrices antisymétriques de  $\mathcal{N}(n, \mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) sont paramétrées par le rang qui est pair.

$$GL(n, \mathbb{K}) \times \text{Anti-sym}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Anti-sym}(n, \mathbb{K})$$

$$(P, X) \longmapsto PXP^T$$

$$X \sim Y \Leftrightarrow \text{rg } X = \text{rg } Y = 2p$$

$$\text{rg } X = 2p \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid PAP^T = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Deux matrices  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{N}(n, \mathbb{C})$  sont semblables si et seulement si 1) elles ont mêmes valeurs propres  $\lambda_i$  et  $\forall i=1, \dots, n, \forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{rg} (X - \lambda_i I_n)^k = \text{rg} (Y - \lambda_i I_n)^k$$

Un représentant d'une classe de similitude est donné par une matrice de Jordan :

Diagram illustrating the Jordan form of a matrix. The matrix is shown as a block diagonal matrix with blocks  $J_1, J_2, \dots, J_k$ . The structure of a single Jordan block  $J_i$  is given by:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Rqur: Comme  $\text{rg}(X - \lambda_i I_n)^k = \text{rg}(X^T - \lambda_i I_n)^k$   
toute matrice est semblable à sa transposée.

Prop: (Décomposition de Dunford) Soit  $X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ .

Alors il existe un unique couple de matrices  $(N, D) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$  tel que

- 1)  $X = N + D$
- 2)  $\exists k \in \mathbb{N}, N^k = 0$  ( $= N$  est nilpotent)
- 3)  $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid PDP^{-1}$  soit diagonale ( $= D$  diagonalisable)
- 4)  $ND = DN$ .

De plus  $N$  et  $D$  sont des polynômes en  $X$ .

Prop:

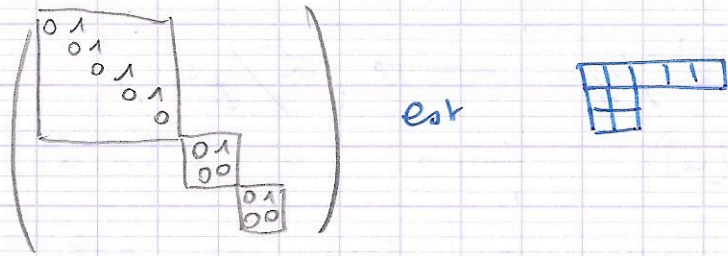
Soit  $X = N + D$  la décomposition de Dunford de  $X$ . Alors il existe une matrice de changement de base  $P$  telle que  $PNP^{-1}$  soit une matrice de Jordan (avec des 0 sur la diagonale).

Corollaire: Pour un tel  $P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $PXP^{-1}$  est une matrice de Jordan.

Def: Soit  $A$  une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ .  
Le tableau de Young de  $A$  est un tableau à  $n$  cases tel que

- la première colonne est constituée de  $\dim \text{Ker } A$  cases
- la deuxième colonne est constituée de  $\dim \text{Ker } A^2 - \dim \text{Ker } A$  cases
- ... la  $k^{\text{ième}}$  colonne est constituée de  $\dim \text{Ker } A^k - \dim \text{Ker } A^{k-1}$  cases.

Exemple: Le tableau de Young de



Rq: Un tableau de Young est triangulaire car les sauts de dimensions s'effaillent :

$$\ker A \subset \ker A^2 \subset \dots \subset \ker A^k = \mathbb{C}^n$$

du fait des injections :  $\ker A^{k+1} / \ker A^k \hookrightarrow \ker A^k / \ker A^{k-1}$

### 3. Action d'un groupe topologique :

Déf: On dit qu'un groupe topologique  $G$  opère continûment sur un espace topologique  $\Omega$  séparé si et seulement si l'application  $G \times \Omega \rightarrow \Omega$  est  $\mathcal{C}^0$ .

$$(g, m) \mapsto g \cdot m$$

Rq: Si  $G$  opère continûment sur  $\Omega$ , le stabilisateur d'un point  $m$  est fermé

$$G_m = \{ g \in G \mid g \cdot m = m \} = F_m^{-1}(\{m\})$$

où  $F_m : G \rightarrow \Omega$  est  $\mathcal{C}^0$

$$g \mapsto g \cdot m$$

et pour tout  $g \in G$ , l'application  $f_g : \Omega \rightarrow \Omega$

$$m \mapsto g \cdot m$$

est un homéomorphisme.

**⚠** Si  $G$  opère continûment sur un espace topologique  $\Omega$  alors la bijection canonique

$$\psi_m : G/G_m \longrightarrow G \cdot m = \Omega_m \subset \Omega$$

$$gG_m \longmapsto g \cdot m$$

est continue lorsque l'on munit  $\Omega_m$  de la topologie induite par  $\Omega$ , mais pas un homéomorphisme en général.

Exemple:  $\mathbb{R}$  agit sur  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$  par:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ (t, [u]) &\longrightarrow [u + t(1, a)] \end{aligned}$$

Le stabilisateur de  $[0]$  pour cette action est

$$G_{[0]} = \{ t \in \mathbb{R} \mid t(1, a) \in \mathbb{Z}^2 \}$$

Deux cas se présentent:

1) si  $a$  est rationnel :  $a = \frac{p}{q}$   $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$   
 $(p, q) = 1$

$$G_{[0]} = q\mathbb{Z} \text{ et}$$

$$G/G_{[0]} = \mathbb{R}/q\mathbb{Z} \simeq S^1 \text{ compact donc}$$

$$\psi_{[0]} : G/G_{[0]} \longrightarrow G \cdot [0] = \mathbb{R} \cdot [0] \subset \mathbb{T}^2$$

est un homéomorphisme (par le thm suivant.)

2) si  $a$  est irrationnel, alors  $G_{[0]} = \{0\}$

$$\text{et } \psi_{[0]} : G/G_{[0]} = \mathbb{R} \longrightarrow G \cdot [0] \subset \mathbb{T}^2$$

est une image dense et n'est pas un homéomorphisme

Thm 1:

Si  $G/G_m$  est compact alors  $\psi_m : G/G_m \longrightarrow G \cdot m$   
 est un homéomorphisme (lorsque  $G \cdot m$  est  
 muni de la topologie induite par  $\mathbb{T}^2$ ).

Dem:  $\psi_m$  est une bijection continue. Comme  $G/G_m$   
 est compact, tout fermé de  $G/G_m$  est compact.  
 Comme l'image d'un compact par une fonction  
 continue est compact, a fortiori fermé\*,  
 l'application  $\psi_m$  est une application fermée  
 (envoie les fermés de  $G/G_m$  sur les fermés de  $G \cdot m$ )

\* on suppose ici  
 que  $\mathbb{T}^2$  est séparé



Comme  $\varphi_m$  est une bijection ; pour tout fermé  $F$  de  $G/G_m$

$$\varphi_m \left( \underbrace{G/G_m \setminus F}_{\text{ouvert de } G/G_m} \right) = \underbrace{G \cdot m \setminus \varphi_m(F)}_{\text{ouvert de } G \cdot m}.$$

Donc  $\varphi_m$  est aussi une application ouverte. Autrement dit la bijection réciproque est continue et  $\varphi_m$  est un homéomorphisme.

### Applications :

1) l'orbite de  $[0] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  par l'action de  $\mathbb{R}$  donnée par  $(t, [u]) \rightarrow [u + t(1, \frac{p}{q})]$  est homéomorphe (pour la topologie induite par  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ) à  $S^1 \cong \mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ .

2) Lorsque  $U(n)$  (ou  $O(n, \mathbb{R})$ ) agit par conjugaison sur  $\mathbb{N}(n, \mathbb{C})$  (ou  $\mathbb{N}(n, \mathbb{R})$ ), chaque orbite munie de la topologie induite par  $\mathbb{N}(n, \mathbb{C})$  (resp.  $\mathbb{N}(n, \mathbb{R})$ ) est homéomorphe au quotient  $G/G_m$  (pour la topologie quotient), où  $G_m$  est le stabilisateur d'un point  $m$  de l'orbite.

### Thm 2 :

Soit  $G$  un groupe localement compact, réunion dénombrable de compacts, agissant continûment et transitivement sur un espace topologique <sup>séparé</sup> localement compact  $\Omega$ . Alors  $\forall m \in \Omega$ ,  $\varphi_m : G/G_m \rightarrow G \cdot m = \Omega_m$  est un homéomorphisme.

Def : Un espace topologique séparé  $\Omega$  est dit localement compact si et seulement si tout point admet un voisinage compact, c'est-à-dire  $\forall m \in \Omega$ ,  $\exists K \subset \Omega$  compact de  $\Omega$  et  $\exists U \subset \Omega$  ouvert de  $\Omega$  tels que  $m \in U \subset K$ .

Exemple: 0) Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est localement compact.

1) Tout espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est un espace localement compact.

2) Tout ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est localement compact.

ex:  $GL(n, \mathbb{R})$  ouvert de  $M(n, \mathbb{R})$  est loc. compact  
 $GL(n, \mathbb{C})$  ouvert de  $M(n, \mathbb{C})$  est loc. compact.

Rq:  $GL(n, \mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \det^{-1} \left( \left[ \frac{1}{n}, n \right] \right) \cap \overline{B(0, n)}$   
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \det^{-1} \left( \left[ -n, -\frac{1}{n} \right] \right) \cap \overline{B(0, n)}$

où  $\overline{B(0, n)}$  est la boule fermée de  $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M(n, \mathbb{R})$  de centre 0 et de rayon  $n$ .

Donc  $GL(n, \mathbb{R})$  est une réunion dénombrable de compacts.

Prop: Un espace topologique localement compact séparé est de Boire, c'est-à-dire tel que toute intersection dénombrable d'ouverts denses soit dense (ou de manière équivalente tel que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide soit d'intérieur vide).

Dem dans le cas d'un espace métrique ou métrisable:

Soit  $\Omega$  un espace localement compact séparé dont la topologie est métrisable. Etant donné  $m \in \Omega$ ,  $\exists U_m$  ouvert de  $\Omega$  et  $K_m$  compact de  $\Omega$  tel que  $m \in U_m \subset K_m$ . Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage ouvert de  $m$  contenu dans  $U_m \subset K_m$ . On va montrer que  $\mathcal{U} \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right)$  est non vide lorsque  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'ouverts denses. On construit une suite

d'ouverts  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite de points  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

- 1)  $m_n \in O_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 2)  $O_n \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 3)  $O_{n+1} \subset O_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

par récurrence :

- $m_0 = m, \quad O_0 = U$
- supposons que les ouverts  $O_k \subset O_{k+1} \subset \dots \subset O_0$  et les points  $m_0, m_1, \dots, m_k$  sont construits. Alors comme  $U_{k+1}$  est dense, il existe  $m_{k+1} \in O_k \cap U_{k+1}$ . Comme  $U_{k+1}$  est ouvert il existe  $O_{k+1}$  ouvert contenant  $m_{k+1}$  tel que  $O_{k+1} \subset U_{k+1} \cap O_k$

Alors de la suite  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on peut extraire une sous-suite convergente  $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  vers un point  $x \in \Omega$ .

On a :  $x \in O_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  donc  $x \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

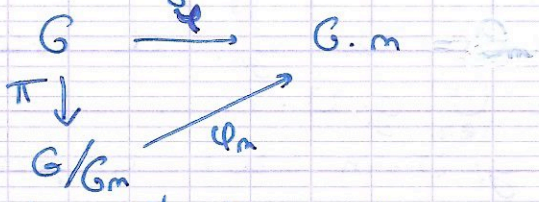
En effet supposons que  $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ . Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tq  $x \notin O_n$ . Comme  $\Omega$  est séparé, il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $U \cap O_n = \emptyset$ .

Or, comme  $x$  est la limite de  $m_{n_k}$ , il existe un rang à partir duquel  $m_{n_k} \in U$ . La contradiction provient du fait que  $m_{n_k} \in O_{n_k} \subset O_n$  pour  $n_k \geq n$ .

Conclusion :  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  et  $x \in U = \Omega$ .

Dem du Thm 2:

On a le diagramme commutatif suivant



D'après la définition de la topologie quotient :

$\varphi_m$  est continue  $\Leftrightarrow \varphi_m \circ \pi$  est continue

$\varphi_m$  est ouverte  $\Leftrightarrow \varphi_m \circ \pi$  est ouverte.

Soit  $U$  un ouvert de  $G$ . Montrons que  $U \cdot m = \{g \cdot m, g \in U\}$  est un ouvert de  $G \cdot m$ .  
 Etant donné un point  $g \cdot m$  de  $U \cdot m$  ( $g \in U$ )  
 il s'agit de trouver un voisinage ouvert  $V_{g \cdot m}$   
 de  $g \cdot m$  contenu dans  $U \cdot m$ . Comme  $G$  agit  
 continûment sur  $\Omega$ , cela revient à trouver  
 un voisinage  $V_m$  de  $m$  contenu dans  $g^{-1}U \cdot m$   
 (l'application  $f_g: \Omega \rightarrow \Omega$  est un homéomorphisme)  
 $u \rightarrow g \cdot u$

Comme  $g \in U$ ,  $g^{-1}U$  contient  $e_G$ . La multiplication  
 de  $G$  étant continue, il existe un voisinage ouvert  
 $V_{e_G}$  de  $e_G \in G$  tel que  $V_{e_G} \cdot V_{e_G} \subset g^{-1}U$ .  
 Puisque  $G$  est localement compact, il existe  
 un ouvert  $V'_{e_G}$  et un compact  $K$  tels que  
 $e_G \in V'_{e_G} \subset K$ . Alors  $V_{e_G} \cap V'_{e_G}$  est un voisinage de  $e_G$   
 d'adhérence compact. Posons  $V = (V_{e_G} \cap V'_{e_G}) \cap \text{inv}(V_{e_G} \cap V'_{e_G})$ .  
 Alors  $V \cdot V \subset V_{e_G} \cdot V_{e_G} \subset g^{-1}U$ ,  $V$  est ouvert et  
 $\text{inv } V = \{g^{-1}, g \in V\} = V$ .

Montrons qu'il existe une suite  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de points de  $G$   
 telle que  $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \cdot U$ . Comme  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$   
 pour une suite de compacts  $K_n$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$K_n = \bigcup_{g \in K_n} g \cdot U$  recouvrement ouvert dont on  
 extrait un sous-recouvrement fini  $K_n = \bigcup_{i=1}^{N_n} g_{n,i} \cdot U$   
 Alors  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{N_n} g_{n,i} \cdot U$ . Comme une union  
 dénombrable d'ensembles finis est dénombrable,  
 on peut réindexer les  $g_{n,i}$  de sorte que  $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \cdot U$ .  
 Ainsi:  $G \cdot m = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i \cdot U \cdot m$ .

Les ensembles  $g_i \cdot U \cdot m$  sont compacts car  $U$  est  
 compact et  $f_m: \Omega \rightarrow Lg_i$  est continue. Puisque  $G \cdot m$   
 est séparé, les compacts  $g_i \cdot U \cdot m$  sont fermés.  
 On a donc écrit l'espace topologique  $G \cdot m$

comme une union dénombrable de fermés.

L'hypothèse que  $G \cdot m$  est localement compact implique alors que l'un (au moins) des  $g_i \cdot U \cdot m$ , disons  $g_k \cdot U \cdot m$  pour un certain  $k$ , est d'intérieur non vide (on utilise ici que  $G \cdot m$  est de Baire et d'intérieur non vide car ouvert de  $G \cdot m$ ). Soit alors un point  $g_k \cdot w \cdot m$  de  $g_k \cdot U \cdot m$  et un ouvert  $W$  de  $g_k \cdot U \cdot m \subset G \cdot m$  contenant  $g_k \cdot w \cdot m$ . Alors  $w^{-1} g_k^{-1} W$  est un ouvert (car l'action de  $G$  est continue) contenant

$$w^{-1} g_k^{-1} g_k \cdot w \cdot m = e_G \cdot m = m.$$

De plus  $w^{-1} g_k^{-1} W \subset w^{-1} g_k^{-1} g_k \cdot U \cdot m \subset \underbrace{(U \cdot U) \cdot m}_{\subset g^{-1} U \cdot m}$

Ainsi  $U_m := w^{-1} g_k^{-1} W$  est un voisinage de  $m$  contenu dans  $g^{-1} U \cdot m$ .

### Applications:

1) Pour  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des matrices de rang  $r$  muni de la topologie induite par  $\mathcal{M}(n, K)$  est localement compact (et séparé puisque  $\mathcal{M}(n, K)$  l'est). cf. exo 5 feuille de TD n° 4.

Par conséquent, la classe de  $r$ -équivalence d'une matrice  $\Pi$  est homéomorphe au quotient de  $GL(n, K) \times GL(n, K)$  par le stabilisateur de  $\Pi$ .

e) Pour  $K = \mathbb{C}$ , la classe de similitude d'une matrice  $\Pi$  de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et telle que  $\text{rg}(\Pi - \lambda_i I_n)^k = r_{i,k}$  est l'ensemble de  $X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$  tq

$$\begin{cases} \det(X - \lambda_i I_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et} \\ (X - \lambda_i I_n)^k \in \mathcal{M}_{r_{i,k}} \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où  $\mathcal{M}_{r_{i,k}}$  désigne l'ensemble des matrices complexes de rang  $r_{i,k}$ .

Ainsi l'orbite de  $\Omega$  pour l'action par conjugaison (ou similitude) de  $GL(n, \mathbb{C})$  est

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in \Omega(n, \mathbb{C}) \mid \det(x - \lambda_i I_n) = 0\} \cap F_{i,k}^{-1}(\mathcal{U}_{G_{i,k}})$$

où  $F_{i,k} : \Omega(n, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega(n, \mathbb{C})$  est

$$x \mapsto (x - \lambda_i I_n)^k$$

une application propre (l'image réciproque d'un compact est un compact) et continue. Par conséquent la classe de similitude de  $\Omega$  est localement compact et homéomorphe au quotient  $GL(n, \mathbb{C}) / Z_{\mathbb{C}}(\Omega)$

où  $Z_{\mathbb{C}}(\Omega) = \{P \in GL(n, \mathbb{C}) \mid P\Omega P^{-1} = \Omega\}$ .

3) Pour  $K = \mathbb{R}$ , la classe de similitude de  $\Omega$  sous l'action de  $GL(n, \mathbb{R})$ , notée  $\mathcal{O}_n^{\mathbb{R}}$  est égale à  $\mathcal{O}_n^{\mathbb{R}} = \mathcal{O}_n^{\mathbb{C}} \cap \Omega(n, \mathbb{R})$  où  $\mathcal{O}_n^{\mathbb{C}}$  désigne la classe de similitude de  $\Omega$  sous l'action de  $GL(n, \mathbb{C})$  (cf. exo 2 feuille de TD 4).

Il en découle que  $\mathcal{O}_n^{\mathbb{R}}$  est localement compact et homéomorphe au quotient  $GL(n, \mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}(\Omega)$  où  $Z_{\mathbb{R}}(\Omega) = \{P \in GL(n, \mathbb{R}) \mid P\Omega P^{-1} = \Omega\}$ .

#### 4. Action d'un groupe de Lie

Def: Soit  $G$  un groupe de Lie. On dit que  $G$  agit de manière  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur une variété  $\Omega$  (de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ ) si et seulement si

l'application  $G \times \Omega \rightarrow \Omega$  est  $\mathcal{C}^{\infty}$

$$(g, m) \mapsto g \cdot m$$

(par la structure de variété produit de  $G \times \Omega$ ).

Prop: Dans ce cas,  $f_g : \Omega \rightarrow \Omega$  est un difféo  $\mathcal{C}^{\infty}$ .

$$m \mapsto g \cdot m$$

Prop: (cf expo 3 de la feuille de TD n° 4).

Soit  $G$  un groupe de Lie de dimension finie et  $H$  un sous-groupe de Lie fermé de  $G$ .

Alors  $G/H$  admet une structure naturelle de variété  $G^m$  telle que l'action de  $G$  sur  $G/H : g \cdot g'H = gg'H$  est différentiable.

Rques:

- 1) lorsqu'un groupe de Lie agit sur une variété  $\Omega$ , l'espace quotient  $G/G_m$ , où  $G_m$  est le stabilisateur d'un point  $m \in \Omega$ , est toujours une variété car  $G_m$  est fermé.
- 2) L'application canonique  $\varphi : G/G_m \rightarrow \Omega$  est toujours une immersion injective.

Applications:

- 1) L'ensemble des matrices de rang  $r$  est une sous-variété de  $\Omega(n, \mathbb{K})$ .
- 2) Les classes de similitude sous l'action de  $GL(n, \mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) sont des sous-variétés de  $\Omega(n, \mathbb{K})$ .

Prop: Les classes de similitude de matrices réelles sous l'action de  $GL(n, \mathbb{R})$  par conjugaison sont toutes de dimensions paires.

Dem: Soit  $A \in \Omega(n, \mathbb{R})$ . Le stabilisateur de  $A$  pour l'action par conjugaison est

$$\begin{aligned} Z(A) &= \{ P \in GL(n, \mathbb{R}) \mid PAP^{-1} = A \} \\ &= GL(n, \mathbb{R}) \cap Z(A) \end{aligned}$$

où  $Z(A) = \{ X \in GL(n, \mathbb{R}) \mid [A, X] = 0 \} = \text{Ker } \text{ad } A$ .

Ainsi  $Z(A)$  est un ouvert de l'espace vectoriel  $Z(A)$ .

Notons  $\varphi$  l'application  $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{O}_A = \mathcal{O}_A$   

$$P \mapsto PAP^{-1}$$

Alors  $D_{\mathbb{I}\varphi} : T_{\mathbb{I}} GL(n, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_A \mathfrak{O}_A$   

$$X \mapsto \frac{d}{dt} \exp tX \cdot A \cdot \exp -tX$$

Ainsi  $T_A \mathfrak{O}_A \simeq \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) / \mathfrak{z}(A) \simeq \text{Im ad } A$   

$$= XA - AX = [X, A]$$

Mais  $\mathfrak{z}(A)$  est de codimension paire comme noyau de la forme bilinéaire alternée définie par :

$$\mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto \text{Tr } A[X, Y] = \text{Tr } [A, X]Y$$

Lemme: le noyau d'une forme bilinéaire alternée  $b$  sur un espace vectoriel (de dimension finie) réel est de codimension paire.

Dem:

$b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  défini par passage au quotient une forme bilinéaire alternée  $\bar{b}$  sur  $E/E^{\perp b}$  où  $E^{\perp b} = \{u \in E \mid b(u, v) = 0 \forall v \in E\}$  est le noyau de  $b$ .

De plus  $\bar{b}$  est non-dégénérée. La matrice  $B$  de  $\bar{b}$  dans une base de l'espace vectoriel quotient  $E/E^{\perp b}$  est anti-symétrique de déterminant non nul.

Alors  $\det B = \det B^T = \det (-B) = (-1)^n \det B \neq 0$   
 donc  $(-1)^n = 1$  et  $n = \dim E/E^{\perp b}$  est pair.

Rem: la même démonstration marche sur les complexes et donne : le noyau d'une forme bilinéaire alternée  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  sur un espace vectoriel  $E$  complexe de dimension finie est de codimension complexe paire, i.e de codim. réelle multiple de 4.



Corollaire : La classe de similitude d'une matrice complexe sous l'action de  $GL(n, \mathbb{C})$  par conjugaison est de dimension  $\underbrace{2k}_{\text{réelle}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Exemple : Classes de similitude de  $sl(2, \mathbb{R})$ .

$GL(2, \mathbb{R})$  agit par conjugaison sur  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$   
 en préservant  $sl(2, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \mid \text{Tr} A = 0 \}$   
 $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_0 \\ x_2 - x_0 & -x_1 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_0) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Un élément  $A$  de  $sl(2, \mathbb{R})$  est semblable (ie conjugué) sous l'action de  $GL(2, \mathbb{R})$  (même sous l'action de  $SL(2, \mathbb{R})$ ) à une et une seule des matrices

suivantes :  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$  pour un  $\lambda > 0$  ;  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$  pour un  $b > 0$

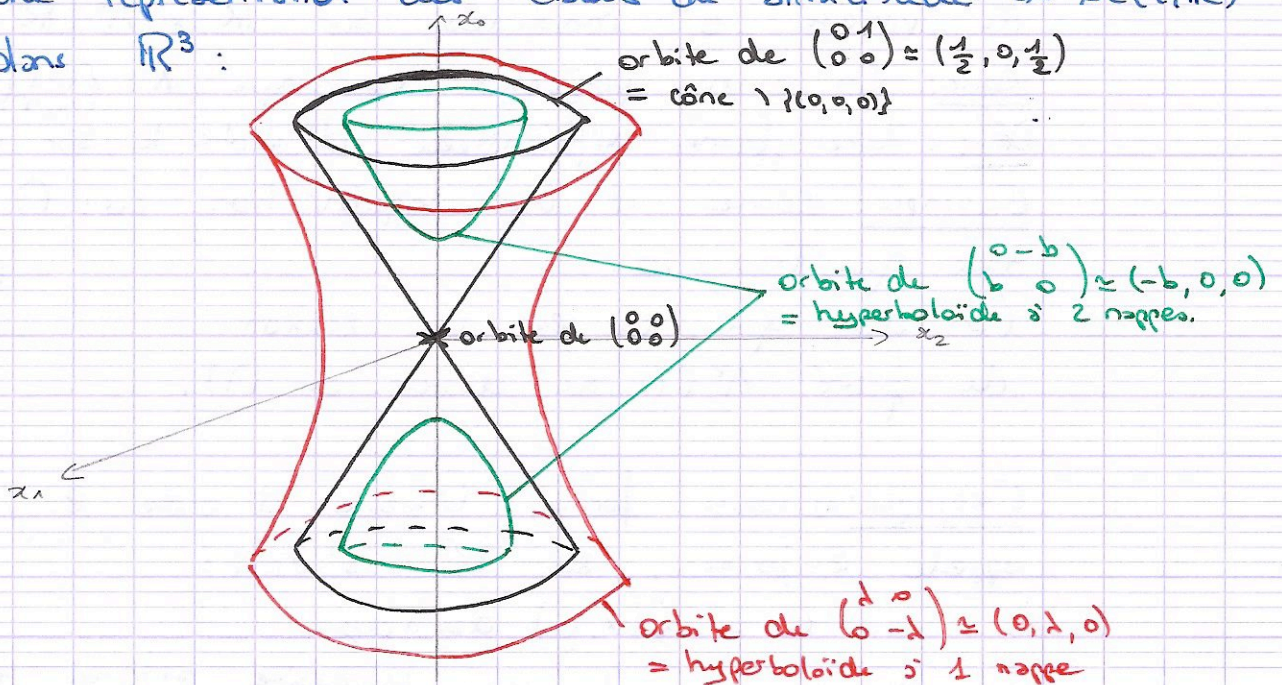
On dit que  $A$  est hyperbolique ; nilpotente ; elliptique .

En particulier, les classes de similitude des éléments non nuls de  $sl(2, \mathbb{R})$  sont paramétrées

par le déterminant :  $\det < 0$  ;  $\det = 0$  ;  $\det > 0$

Puisque  $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_0 \\ x_2 - x_0 & -x_1 \end{pmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ , on a

une représentation des classes de similitude de  $sl(2, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^3$  :



Def: Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )  
 On note  $L^k(E)$  l'ensemble des applications  $k$ -linéaires  
 de  $E$  et  $A^k(E)$  le sous-espace vectoriel de  $L^k(E)$   
 formé des applications  $k$ -linéaire alternées i.e vérifiant

$$T(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$$

pour tous vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  de  $E$  et tout élément  
 $\sigma$  du groupe des permutations de  $\{1, \dots, k\}$ ,  
 où  $\varepsilon(\sigma)$  désigne la signature de  $\sigma$ .

Ex: Sur  $\mathbb{R}^n$ , le déterminant, qui à  $n$  vecteurs  
 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  associe le déterminant de  
 la matrice  $(v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ , est une application  $n$ -linéaire  
 alternée.

Idem sur  $\mathbb{C}^n$ .

Def: Soit  $\Omega^n$  une variété  $\mathbb{C}^0$ . Le produit extérieur  
 d'ordre  $k$  de  $T\Omega$  est défini par :

$$\Lambda^k \Omega = \bigcup_{m \in \Omega} \{m\} \times A^k(T_m \Omega)$$

Prop:  $\Lambda^k \Omega^n$  possède une structure naturelle  
 de variété  $\mathbb{C}^0$  modélée sur  $\mathbb{R}^n \times A^k(\mathbb{R}^n)$ .

Reque: On a une projection canonique  $\pi: \Lambda^k \Omega \rightarrow \Omega$   
 $(m, T) \mapsto m$ .

Def: Une forme différentielle d'ordre  $k$  sur une variété  $\Omega$   
 est la donnée d'une application  $\omega: \Omega \rightarrow \Lambda^k \Omega$   
 telle que  $\pi \circ \omega = \text{id}$ .



(on dit que  $\omega$  est une section  
 du fibré  $\Lambda^k \Omega$  au-dessus de  $\Omega$ ).

Exemple: Toute forme linéaire d'ordre 2,  
 appelé 2-forme, sur  $\mathbb{R}^2$  s'écrit :

$$\omega = f(x, y) dx \wedge dy$$

où  $dx \wedge dy$  est la forme bilinéaire alternée sur  $\mathbb{R}^2$   
 donnée par  $dx \wedge dy \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ .

1) Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ , la différentielle de  $f$  est une 1-forme sur  $\Omega$ :

$$Df = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{dans une carte}$$

$$\text{avec } D_x f = df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

$$\text{et } D_x f \Big|_{T_x \Omega} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) X_i \quad \text{où } X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

2) Sur  $\mathbb{R}^n$ , on a les  $k$ -formes linéaires alternées suivantes:

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k \left( \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{matrix} \Big|_{\mathbb{R}^n}, \dots, \begin{matrix} \vec{v}_k \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{matrix} \Big|_{\mathbb{R}^n} \right) = \det \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_k \\ v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kk} \\ \hline v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nk} \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\det} \right\} \text{ on barre les } (n-k) \text{ dernières coord.}$$

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \det \begin{pmatrix} v_{1i_1} & v_{1i_2} & \dots & v_{1i_k} \\ \hline v_{2i_1} & v_{2i_2} & \dots & v_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ki_1} & v_{ki_2} & \dots & v_{ki_k} \\ \hline v_{ni_1} & v_{ni_2} & \dots & v_{ni_k} \end{pmatrix}$$

$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) =$  le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coord. des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  à laquelle on a supprimé toutes les lignes excepté les lignes  $i_1, i_2, \dots, i_k$ .

Prop: L'ensemble  $\left\{ dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \right\}$  est une base de  $A^k(\mathbb{R}^n)$ .

Corollaire: Toute  $k$ -forme linéaire alternée sur une variété  $\Omega$  s'écrit localement (c'est-à-dire dans une carte) comme

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Def: La différentielle extérieure d'une  $k$ -forme  $\omega$  sur une variété  $\Omega$ , notée  $d\omega$ , est une  $(k+1)$ -forme sur  $\Omega$  qui s'écrit localement:

$$d\omega(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Rem: Il faut vérifier que cette définition a un sens global. Cela revient à montrer que, étant  $(k+1)$ -vecteurs de  $T_m \Omega$ :  $X_0, \dots, X_k$  et  $(k+1)$ -champs de vecteurs  $Y_0, \dots, Y_k$  tels que  $Y_i(m) = X_i \quad \forall i = 0, \dots, k$  l'expression suivante ne dépend pas des extensions  $Y_0, \dots, Y_k$  mais seulement de leurs valeurs en  $m$ :

$$d\omega(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j Y_j \cdot \omega(Y_0, \dots, \widehat{Y}_j, \dots, Y_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, \widehat{Y}_j, \dots, Y_k)$$

Ex: La différentielle d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  vérifie  $d(df) = 0$  car  $d(df) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0$

car  $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$  et  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ .

Def: On appelle forme fermée, toute forme différentielle  $\omega$  vérifiant  $d\omega = 0$ .

Def: On appelle forme symplectique sur une variété  $\Omega$  une 2-forme non dégénérée fermée.

Prop: Soit  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{O}_A = \{PAP^{-1}, P \in GL(n, \mathbb{R})\}$  la classe de similitude de  $A$  (= l'orbite adjointe de  $A$ ). Alors la 2-forme  $\omega$  définie sur  $\mathcal{O}_A$  par:

$$\begin{aligned} \omega_n : T_n \mathcal{O}_A \times T_n \mathcal{O}_A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \downarrow \cong & \quad \downarrow \cong \\ \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) / \mathcal{Z}(n) & \quad \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) / \mathcal{Z}(n) \longrightarrow \mathbb{R} \\ ([X]_{\mathcal{Z}(n)}, [Y]_{\mathcal{Z}(n)}) &\longrightarrow \text{Tr}([X, Y]) \end{aligned}$$

est une forme symplectique sur  $\mathcal{O}_A$ .

Dem: En chaque espace tangent c'est une forme bilinéaire alternée non-dégénérée (on a justement quotienté par le noyau). Il reste à montrer qu'elle est fermée. En  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ , un vecteur tangent est donné par:

$$[X]_{\mathcal{Z}(A)} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) / \mathcal{Z}(A) \xrightarrow{\sim} T_A \mathcal{O}_A \ni [X, A]$$

Une extension possible de ce vecteur en un champ de vecteurs est

$$Y = [X]_{\mathcal{Z}(n)} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) / \mathcal{Z}(n) \xrightarrow{\sim} T_n \mathcal{O}_A \ni [X, \Pi]$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } d\omega(X_0, X_1, X_2) &= Y_0 \cdot \omega(Y_1, Y_2) - Y_1 \cdot \omega(Y_0, Y_2) \\ &\quad + Y_2 \cdot \omega(Y_0, Y_1) - \omega([Y_0, Y_1], Y_2) \\ &\quad + \omega([Y_0, Y_2], Y_1) - \omega([Y_1, Y_2], Y_0) \end{aligned}$$

où  $X_i \approx [X_i]_{\mathcal{Z}(A)}$  et  $Y_i = [X_i]_{\mathcal{Z}(n)}$   
avec  $X_i \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ .

Une courbe tangente au champ de vecteur  $Y_i$  passant par  $A$  est  $\gamma_i(t) = \exp tX_i \cdot A \exp -tX_i$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} Y_0 \cdot \omega(Y_1, Y_2) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_{\gamma_0(t)}(Y_1(\gamma_0(t)), Y_2(\gamma_0(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Tr} \gamma_0(t) [X_1, X_2] \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Tr} \exp tX_0 \cdot A \exp -tX_0 [X_1, X_2] \\ &= \text{Tr} [X_0, A] [X_1, X_2] \\ &= \text{Tr} (X_0 A - A X_0) [X_1, X_2] \\ &= \text{Tr} A [X_1, X_2] X_0 - A X_0 [X_1, X_2] \\ &= \text{Tr} A [[X_1, X_2], X_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } d\omega(X_0, X_1, X_2) &= \text{Tr} A [[X_1, X_2], X_0] \\ &\quad - \text{Tr} A [[X_0, X_2], X_1] \\ &\quad + \text{Tr} A [[X_0, X_1], X_2] \\ &\quad - \text{Tr} A [[X_0, X_1], X_2] \\ &\quad + \text{Tr} A [[X_0, X_2], X_1] \\ &\quad - \text{Tr} A [[X_1, X_2], X_0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

car le crochet des champs de vecteurs  $Y_0$  et  $Y_1$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_0} Y_1(\varphi) &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_{\substack{s=0 \\ t=0}} \varphi(\Phi_{Y_1}^s \circ \Phi_{Y_0}^t(\pi)) - \varphi(\Phi_{Y_0}^t \circ \Phi_{Y_1}^s(\pi)) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_{\substack{s=0 \\ t=0}} [\varphi(\exp s X_1 \cdot \exp t X_0 \cdot \pi \cdot \exp(t X_0) \exp(s X_1)) \\ &\quad - \varphi(\exp t X_0 \cdot \exp s X_1 \cdot \pi \cdot \exp(t X_0) \exp(s X_1))] \\ &= \varphi([X_1, [X_0, \pi]] - [X_0, [X_1, \pi]]) \\ &= \varphi([\pi, [X_0, X_1]]) \Rightarrow \mathcal{L}_{Y_0} Y_1(A) = [A, [X_0, X_1]]. \end{aligned}$$