Chapitre 5 : Diverses décompositions des groupes de Lie classiques

1. Décomposition polaire et décomposition de Mostow

a. Enoncés :

Thm : (Décomposition polaire de $GL(n,\mathbb{R})$)
Le groupe de Lie $GL(n,\mathbb{R})$ est homéomorphe au produit $O(n,\mathbb{R}) \times \exp(S)$ où S est l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ symétriques :
$S = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid X^T = X\}$.

Rque : $\exp S = \{\exp X,\ X \in S\}$ est exactement l'ensemble des matrices réelles symétriques définie positives.

Thm : (Décomposition polaire du $GL(n,\mathbb{C})$)
Le groupe de Lie $GL(n,\mathbb{C})$ est homéomorphe au produit $U(n) \times \exp H$ où H est l'ensemble des matrices complexe $n \times n$ hermitiennes :
$H = \{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid X^* = X\}$

Rque : $\exp H = \{\exp X,\ X \in H\}$ est exactement l'ensemble des matrices complexes hermitiennes définies positives.

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers du thm de décomposition de Mostow (1955 M.A.M.S. n° 14 p 31-54) dont les versions réelle et complexe s'énoncent comme suit :

Thm 1: (Décomposition de Mostow de $Gl(n,\mathbb{R})$)
Soit E n'importe quel sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices symétriques S tel que $[X,[X,Y]] \in E \quad \forall X, Y \in E$.
Soit F l'orthogonal de E dans S pour la trace :
$$F = \{X \in S \text{ tel que } \operatorname{Tr} XY = 0 \quad \forall Y \in E\}.$$
Alors $Gl(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \times \exp F \times \exp E$ et la décomposition est un homéomorphisme.

Thm 1': (Décomposition de Mostow de $Gl(n,\mathbb{C})$)
Soit E n'importe quel sous-espace vectoriel réel de l'ensemble des matrices hermitiennes H tel que $[X,[X,Y]] \in E \quad \forall X, Y \in E$.
Soit F l'orthogonal de E dans H pour la trace :
$$F = \{X \in H \text{ tq } \operatorname{Tr} XY = 0 \quad \forall Y \in E\}$$
Alors $Gl(n,\mathbb{C}) = U(n) \times \exp F \times \exp E$ et la décomposition est un homéomorphisme.

Rque : Prendre $E = \{\vec{0}\}$ redonne la décomposition polaire.

Ex : $Gl(n,\mathbb{C}) = U(n) \times \exp iA \times \exp S$
où A est l'ens. des matrices anti-symétriques réelles
$$A = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$
car $H = S \oplus iA$ et $[S_1,[S_2,S_3]]^T = [S_1,[S_2,S_3]]$
$\forall S_1, S_2, S_3 \in S$.

b. Démonstration

On fera la démonstration dans le cas réel mais tout se transpose au cas complexe !

Rappels :

1) Toute matrice symétrique se diagonalise dans une base orthonormée de vecteurs propres.

2) Une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ est dite définie-positive ssi $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle = \vec{v}^T A \vec{v} > 0.$$

3) Les valeurs propres d'une matrice symétrique A définie-positive sont des réels non nuls donc s'écrivent $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$:

$$A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$$

$$A = P \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = \exp\left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}\right)$$

Donc $A \in \exp S$. Réciproquement toute matrice de $\exp S$ est symétrique définie-positive.

4) Toute matrice définie positive possède une unique racine carrée définie positive :

$\forall A \in \exp S$, $\exists! \, B \in \exp S$ tel que $B^2 = A$.

En effet, $A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P^{-1} = P^T$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$

donc $B = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n/2} \end{pmatrix} P^{-1}$ convient.

De plus, B est un polynôme en A (penser aux polynômes de Lagrange qui envoient e^{λ_i} sur $e^{\lambda_i/2}$). Toute autre matrice C définie positive tq $C^2 = A$ commute avec A car $C \cdot A = C \cdot C^2 = C^2 \cdot C = A \cdot C$ donc avec B. Donc B, C et A possèdent une base de vecteurs propres communs. Alors l'identité $B^2 = C^2 = A \Rightarrow B = C$ car C est définie positive.

Lemme 1:

Soit E un sev de S tel que $[X,[X,Y]] \in E$ $\forall X, Y \in E$. Notons $F = \{X \in S \mid \operatorname{Tr} XY = 0 \ \forall Y \in E\}$

Alors toute matrice symétrique réelle définie-positive A s'écrit de manière unique comme produit efe, où $e \in \exp E$ et $f \in \exp F$. De plus l'application

$$\begin{aligned} \exp S &\longrightarrow \exp E \times \exp F \\ A &\longmapsto (e,f) \text{ tel que } A = efe \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Dem du thm de Mostow à partir du Lemme 1:

1) Existence de la décomposition:

Soit $M \in GL(n,\mathbb{R})$. Alors $M^T M$ est une matrice symétrique, et définie positive car $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle M^T M \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle M\vec{v}, M\vec{v} \rangle = \|M\vec{v}\|^2 > 0$$

car $M \in GL(n,\mathbb{R})$ n'admet pas 0 comme valeur propre.

D'après le lemme, il existe $e \in \exp E$, $f \in \exp F$ tel que $M^T M = efe$. Mais $f \in \exp F \subset \exp S$ admet une racine carrée $f^{1/2} \in \exp F$.

Alors $k = M(f^{1/2} e)^{-1}$ est une matrice orthogonale :

$$\begin{aligned} k^T k &= (f^{1/2} e)^{-1T} M^T M (f^{1/2} e)^{-1} \\ &= f^{-1/2} e^{-1} efe e^{-1} f^{-1/2} = Id \end{aligned}$$

De même $k k^T = Id$ donc $k \in O(n,\mathbb{R})$ et

$$\underset{GL(n,\mathbb{R})}{\underset{\cap}{M}} = \underset{O(n,\mathbb{R})}{\underset{\cap}{k}} \times \underset{\exp F}{\underset{\cap}{f^{1/2}}} \times \underset{\exp E}{\underset{\cap}{e}} .$$

2) Unicité : provient de l'unicité dans le lemme

3) homéomorphisme : provient du fait que la décomposition dans le lemme est un homéomorphisme

c. Géométrie de $\exp \mathcal{S} = \mathcal{P}$:

On note $\mathcal{P} = \exp \mathcal{S}$ l'ens des matrices réelles symétriques définies positives.

<u>Prop</u>: L'exponentielle $\exp : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ réalise un homéomorphisme des matrices symétriques réelles sur les matrices symétriques réelles définies positives dont l'application réciproque est le logarithme :

$$\begin{array}{rccl} \log : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & p & \longmapsto & \log p = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(p-I)^n}{n} \end{array}$$

<u>Dem</u>: On a vu que $\exp : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ est bijective. En prenant une b.o.n de vecteurs propres on a $\log \exp X = X \quad \forall X \in \mathcal{S}$ et $\exp \log p = p \quad \forall p \in \mathcal{P}$.
Le fait que exp soit un homéo pour la topologie d'espace vectoriel réel de dim $\frac{n(n+1)}{2}$ de $\mathcal{S}$ et la topologie de $\mathcal{P}$ induite par $M(n,\mathbb{R})$ n'est pas trop dur... (cf Mneimné & Testard groupes de Lie classiques p 62)

<u>Prop</u>: Toute matrice symétrique réelle définie positive est congrue à la matrice identité sous l'action de $GL(n,\mathbb{R})$. Autrement dit $GL(n,\mathbb{R})$ agit transitivement (à droite) sur $\mathcal{P}$ par congruence :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (p\,,\,x) & \longmapsto & x^T p\, x \end{array}$$

<u>Dem</u>: Soit $p \in \mathcal{P}$, alors p admet une racine carrée $p^{1/2} \in \mathcal{P}$. Ainsi $p = (p^{1/2})^T I \, p^{1/2}$ est l'image de la matrice Identité sous l'action de $p^{1/2} \in GL(n,\mathbb{R})$.

Csque : $\mathcal{P}$ muni (du complété) de l'atlas à une carte $\left(\mathcal{P}, \log : \mathcal{P} \longrightarrow S \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ est une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

L'espace tangent à $p \in \mathcal{P}$ est

$$T_p\mathcal{P} = p^{1/2}\, S\, p^{1/2} = \{p^{1/2} X p^{1/2},\ X^T = X\}$$

En effet, les courbes $\gamma(t) = p^{1/2} \exp tX\, p^{1/2}$ avec $X \in S$ vérifient $\begin{cases} \gamma(0) = p \\ \dot\gamma(0) = p^{1/2} X p^{1/2} \end{cases}$ et appartiennent à $\mathcal{P}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Donc $p^{1/2} S p^{1/2} \subset T_p\mathcal{P}$ et on a égalité de dimension.

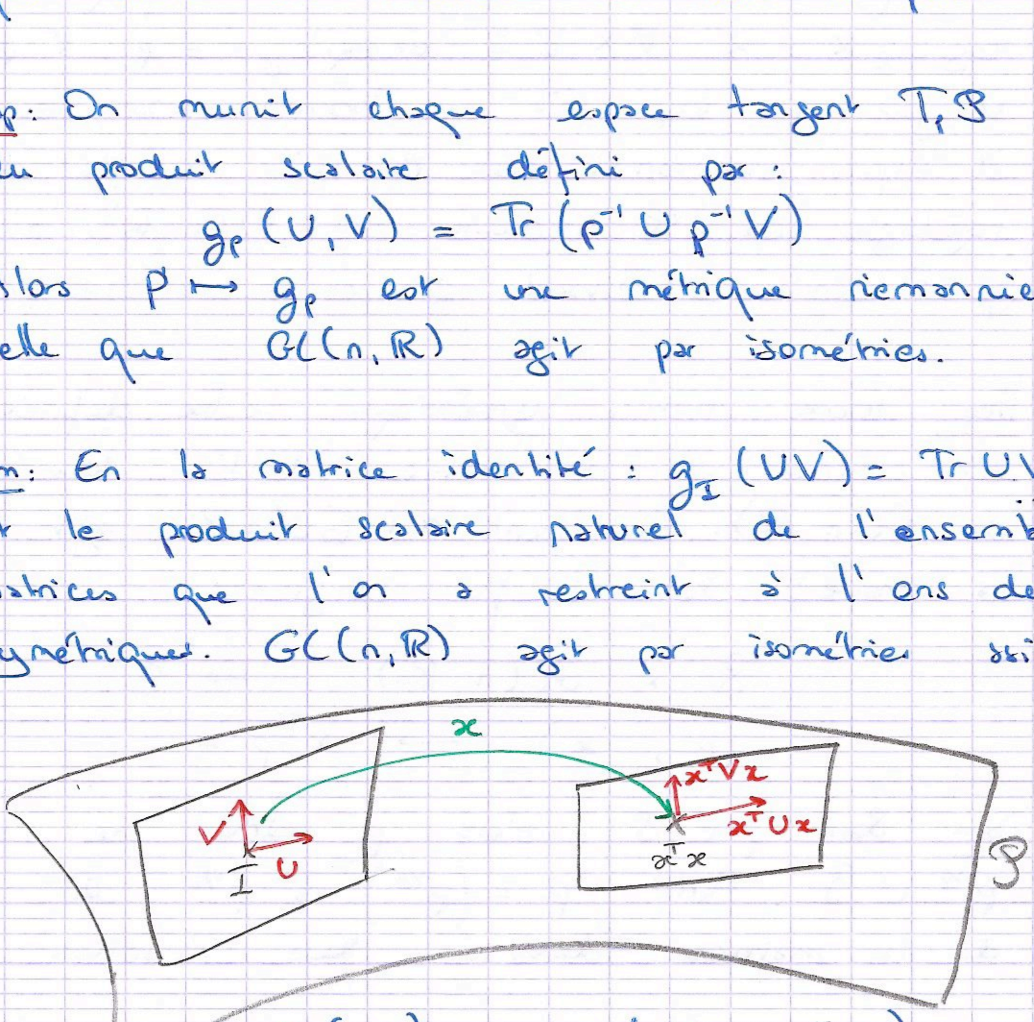
Déf : Une métrique riemannienne sur une variété $\mathcal{P}$ est la donnée en tout point p de $\mathcal{P}$ d'un produit scalaire sur l'espace tangent $T_p\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}$ en p qui varie de manière $\mathcal{C}^\infty$ avec le point p.

Prop : On munit chaque espace tangent $T_p\mathcal{P}$ du produit scalaire défini par :

$$g_p(U,V) = \mathrm{Tr}\,(p^{-1} U p^{-1} V)$$

Alors $p \longmapsto g_p$ est une métrique riemannienne telle que $GL(n,\mathbb{R})$ agit par isométries.

Dem : En la matrice identité : $g_I(UV) = \mathrm{Tr}\, UV = \mathrm{Tr}\, U^T V$ est le produit scalaire naturel de l'ensemble des matrices que l'on a restreint à l'ens des matrices symétriques. $GL(n,\mathbb{R})$ agit par isométrie ssi :



$$g_I(U,V) = g_{x^Tx}(x^T U x, x^T V x)$$

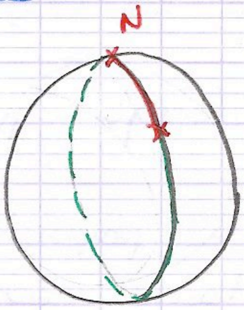
Or $g_{x^Tx}(x^TUx, x^TVx) = Tr\left((x^Tx)^{-1}x^TUx\,(x^Tx)^{-1}x^TVx\right)$
$= Tr(x^{-1}UVx) = Tr\, UV = g_I(U,V)$.

Déf: Soit M une variété muni d'une métrique riemannienne (on dit que M est une variété riemannienne). La longueur d'une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ est définie par :

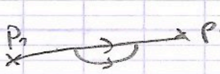
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$$

Déf: Soit (M, g) une variété riemannienne. On appelle géodésique toute courbe qui minimise localement la longueur.

Ex:



S^2

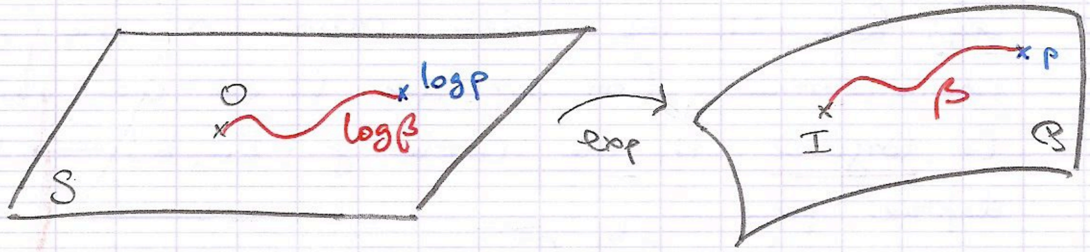
Rqu: une courbe qui minimise globalement la longueur entre deux points est une géodésique (Sinon on pourrait la raccourcir )

Prop: Etant donnée une matrice symétrique définie positive $p \in \mathcal{S}$, il existe une unique courbe dans $(\mathcal{S}, g)$ minimisant la longueur de I à p et c'est :

$$\gamma(t) = \exp t \log p \qquad \text{pour } t \in [0,1]$$

Plus généralement, deux points quelconques de $\mathcal{S}$ sont joints par une unique courbe minimisant la longueur.

Dem: On compare la longueur d'une courbe β de $\mathcal{P}$ à la longueur de la courbe $\log\beta$ de S pour la métrique euclidienne :



On va montrer que :

1) $\underbrace{L_S(\log\beta)}_{\text{longueur de la courbe } t\mapsto \log\beta(t) \text{ dans l'espace vectoriel } S} \leqslant \underbrace{L_{\mathcal{P}}(\beta)}_{\text{longueur de la courbe } \beta \text{ dans la variété riem } (\mathcal{P},g)}$

2) $L_S(\log\gamma) = L_{\mathcal{P}}(\gamma)$ lorsque $\gamma(t) = \exp tX$, $X^T = X$.

Alors 1) et 2) impliquent la proposition car dans l'espace euclidien S toute courbe autre que le segment qui joint O au point $\log p \in S$ a une longueur supérieure strictement à $\log p$:
Ainsi la courbe $\gamma : t \mapsto \exp t\log p$ vérifie :

$$L_S(\log\gamma) = \|\log p\| \underset{2)}{=} L_{\mathcal{P}}(\gamma) < L_S(\log\beta) \underset{1)}{\leq} L_{\mathcal{P}}(\beta)$$

$\forall \beta$ courbe joignant I à p.

De plus, comme $GL(n,\mathbb{R})$ agit transitivement par isométries, ce résultat se transpose en n'importe quel autre point que $I \in \mathcal{P}$.

Pour démontrer 2) on calcule :

$$L_{\mathcal{P}}(\gamma_{[0,1]}) = \int_0^1 \left(g_{\exp tX}\left(\dot{\overline{\exp tX}}, \dot{\overline{\exp tX}}\right)\right)^{1/2} dt$$

$$= \int_0^1 \left(g_{\exp tX}\left(\exp tX \cdot X, \exp tX \cdot X\right)\right)^{1/2} dt$$

$$L_g(\gamma_{|[0,1]}) = \int_0^1 \left(\mathrm{Tr}\, \exp(-tX)\exp tX \cdot X\ \exp(-tX)\exp tX X\right)^{1/2} dt$$
$$= \int_0^1 \left(\mathrm{Tr}\, X^2\right)^{1/2} dt \quad = \left(\mathrm{Tr}\, X^2\right)^{1/2} = \langle X, X\rangle^{1/2} = L_S(\log \gamma)$$

car $\log\gamma : [0,1] \longrightarrow S$
$t \longmapsto tX$.

Pour démontrer 1) on utilise la différentielle de l'exponentielle et le fait que pour tout $X \in S$ l'opérateur

$$\tau_X : S \longrightarrow S$$
$$U \longmapsto \frac{\sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}}{\mathrm{ad}\frac{X}{2}}(U)$$

est symétrique dans le sens où

$$\langle \tau_X(U), V\rangle = \mathrm{Tr}\, \tau_X(U) V = \mathrm{Tr}\, U \tau_X(V) = \langle U, \tau_X(V)\rangle$$

(car $\mathrm{Tr}\,[X,[X,U]]V = \mathrm{Tr}\, U [X,[X,V]] \quad \forall U,V \in S$
et $\frac{\sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}}{\mathrm{ad}\frac{X}{2}}$ ne contient que des puissances paires de $\mathrm{ad} X$)

et de valeurs propres $\frac{\sinh \frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}}{\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}} \geq 1$ où λ_i vp de X.

On a : $g_{\beta(t)}(\dot\beta(t), \dot\beta(t)) = \mathrm{Tr}\left(\beta(t)^{-1}\dot\beta(t)\right)^2$

avec $\beta(t) = \exp \log \beta(t)$ et $\dot\beta(t) = D_{\log\beta} \exp\left(\dot{\overline{\log\beta}}(t)\right)$

$$= D_I L_{\beta(t)}\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}\log\beta}}{\mathrm{ad}\log\beta}\left(\dot{\overline{\log\beta}}\right)\right)$$
$$= \beta(t)\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}\log\beta}}{\mathrm{ad}\log\beta}\left(\dot{\overline{\log\beta}}\right)\right)$$

D'où

$$g_{\beta(t)}(\dot\beta(t), \dot\beta(t)) = \mathrm{Tr}\Big(\underbrace{\frac{1-e^{-\mathrm{ad}\log\beta}}{\mathrm{ad}\log\beta}\left(\dot{\overline{\log\beta}}\right)}_{(*)}\Big)^2$$

En conjugant par $\exp\frac{\log\beta}{2}$ on obtient : (la trace est invariante)

$$g_{\beta(t)}(\dot\beta(t), \dot\beta(t)) = \mathrm{Tr}\, \exp\frac{\log\beta}{2}(*)\exp -\frac{\log\beta}{2}\exp\frac{\log\beta}{2}(*)\exp -\frac{\log\beta}{2}$$
$$= \mathrm{Tr}\, \mathrm{Ad}\exp\frac{\log\beta}{2}(*)\ \mathrm{Ad}\exp\frac{\log\beta}{2}(*)$$

$$g_{\beta(t)}\left(\dot\beta(t),\dot\beta(t)\right) = \mathrm{Tr}\; e^{\mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}}(*)\; e^{\mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}}(*)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\frac{e^{\mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}} - e^{-\mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}}}{2\;\mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}}\left(\dot{\overline{\log\beta}}\right)\right)^2$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\frac{\sinh \mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}}{\mathrm{ad}\frac{\log\beta}{2}}\left(\dot{\overline{\log\beta}}\right)\right)^2$$

$$= \left\langle \tau_x \dot{\overline{\log\beta}},\; \tau_x \dot{\overline{\log\beta}} \right\rangle_S$$

$$\geq \left\langle \dot{\overline{\log\beta}},\; \dot{\overline{\log\beta}} \right\rangle_S = \left\| \dot{\overline{\log\beta}} \right\|_S^2$$

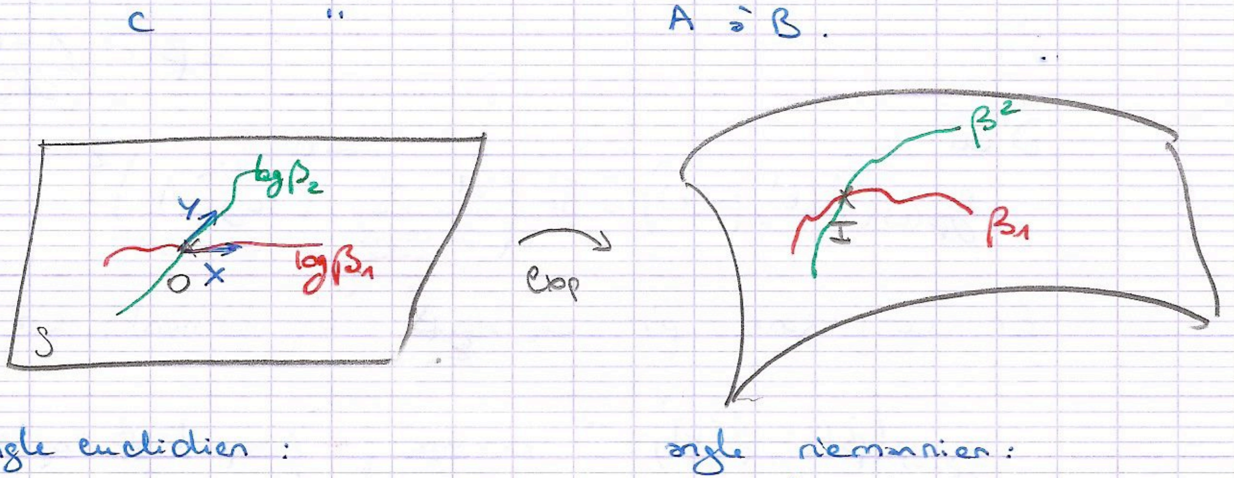
$$\Rightarrow \int_0^t \sqrt{g_{\beta(t)}\left(\dot\beta(t),\dot\beta(t)\right)}\,dt \geq \int_0^t \left\| \dot{\overline{\log\beta(t)}} \right\| dt$$

$$L_{\mathcal{P}}(\beta) \geq L_S(\log\beta).$$

<u>Prop</u>: L'angle entre deux courbes $\begin{cases}\beta_1\\ \beta_2\end{cases}$ de $\mathcal{P}$ s'intersectant en $I \in \mathcal{P}$ est égal à l'angle des courbes $\log\beta_1$ et $\log\beta_2$ s'intersectant en $O \in S$. De plus, pour tout triangle ABC géodésique de $\mathcal{P}$ on a :

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}$$

où a est la longueur de B à C
b " A à C
c " A à B.

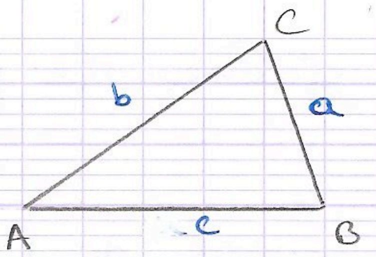


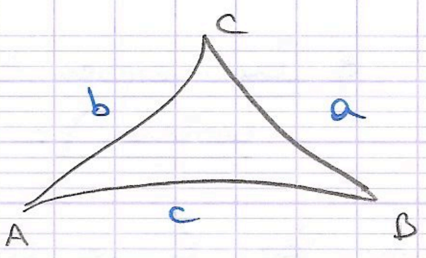
angle euclidien :

$$\cos\alpha = \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|\cdot\|Y\|}$$

angle riemannien :

$$\cos\tilde\alpha = \frac{g_p(X,Y)}{\sqrt{g_p(X,X)}\sqrt{g_p(Y,Y)}}$$





Triangle euclidien

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}$$

Triangle de $\mathcal{P}$

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}$$

Dem :

- Les courbes $t \mapsto \beta_1(t)$ (resp $t \mapsto \beta_2(t)$) et $t \mapsto \exp t\dot\beta_1(0)$ (resp $t \mapsto \exp t\dot\beta_2(0)$) ont même vecteur tangent en $t=0$. Donc l'angle riemannien entre β_1 et β_2 est égal à l'angle riemannien entre $t \mapsto \exp t\dot\beta_1(0)$ et $t \mapsto \exp t\dot\beta_2(0)$ en $t=0$. Ce qui donne :

$$\frac{g_I(\dot\beta_1(0), \dot\beta_2(0))}{\sqrt{g_I(\dot\beta_1(0), \dot\beta_1(0))}\sqrt{g_I(\dot\beta_2(0), \dot\beta_2(0))}} = \frac{\mathrm{Tr}\,\dot\beta_1(0)\dot\beta_2(0)}{\left(\mathrm{Tr}(\dot\beta_1(0))^2\right)^{1/2}\left(\mathrm{Tr}(\dot\beta_2(0))^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\langle \dot{\overline{\log\beta_1}}(0), \dot{\overline{\log\beta_2}}(0)\rangle}{\|\dot{\overline{\log\beta_1}}(0)\| \cdot \|\dot{\overline{\log\beta_2}}(0)\|}$$

Car $\dot{\overline{\log\beta_1}}(0) = D_I\log(\dot\beta_1(0))$
$= \mathrm{Id}(\dot\beta_1(0)) = \dot\beta_1(0)$.

- Soit ABC un triangle géodésique de $\mathcal{P}$. En faisant agir $GL(n,\mathbb{R})$ par isométries on peut supposer $C = I$.

$$c^2 = d_g(A,B)^2 \geq d_S(\log A, \log B)^2 = d_S(I, \log A)^2 + d_S(I, \log B)^2 - 2\, d_S(I, \log A)\, d_S(I, \log B)\cos\alpha$$

$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}$ par égalité de l'angle euclidien et de l'angle riemannien en $C = I$.

d. Sous-espace totalement géodésique (et géodésiquement convexe) :

Thm: Soit E un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices réelles symétriques S. Notons $\mathcal{E} = \exp E$.
Alors : $[X,[X,Y]] \in E \ \forall X,Y \in E \Leftrightarrow efe \in \mathcal{E} \ \forall e,f \in \mathcal{E}$

Lemme: Soit $X \in S$. Posons $a_X : \begin{array}{l} S \longrightarrow S \\ A \longmapsto A.\exp X + \exp X.A \end{array}$

et $\gamma_X = (D_X \exp)^{-1} \circ a_X$. Alors $\gamma_X = \operatorname{ad} X \circ \coth \frac{\operatorname{ad} X}{2}$.

Dem du lemme:
Si on note L_X la multiplication à gauche par la matrice X et R_X la multiplication à droite par la matrice X, on a:

$$a_X = e^{L_X} + e^{R_X} \quad \text{où} \quad e^{L_X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L_X)^k}{k!}$$

$$\Big(\text{où } (L_X)^k = \underbrace{L_X \circ L_X \circ \ldots \circ L_X}_{k \text{ fois}}\Big)$$

et
$$D_X \exp(Y) = \cancel{D}\, \exp X \left(\frac{1-e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}(Y)\right)$$
$$= \exp X . \left(\frac{1-e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}(Y)\right)$$
$$= e^{L_X}\left(\frac{1-e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}(Y)\right)$$
$$= e^{L_X}\left(e^{-\frac{\operatorname{ad} X}{2}} \circ \frac{e^{+\frac{\operatorname{ad} X}{2}} - e^{-\frac{\operatorname{ad} X}{2}}}{2\,\frac{\operatorname{ad} X}{2}}(Y)\right)$$
$$= e^{L_X} \circ e^{-\frac{\operatorname{ad} X}{2}} \circ \frac{\sinh \frac{\operatorname{ad} X}{2}}{\frac{\operatorname{ad} X}{2}}(Y)$$

Or $e^{-\frac{\operatorname{ad} X}{2}} = e^{-\left(\frac{L_X - R_X}{2}\right)} = e^{-\frac{L_X}{2}} \circ e^{+\frac{R_X}{2}}$ car $[L_X, R_X] = 0$.

Ainsi $\quad D_X \exp = e^{\frac{L_X}{2}} \circ e^{\frac{R_X}{2}} \circ \dfrac{\sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}}{\frac{\mathrm{ad} X}{2}}$

Par conséquent :

$$(D_X \exp)^{-1} = \frac{\mathrm{ad} X}{2 \sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}} \circ e^{-\frac{L_X}{2}} \circ e^{-\frac{R_X}{2}}$$

et : $\quad \gamma_X = (D_X \exp)^{-1} \circ a_X = (D_X \exp)^{-1} \circ (e^{L_X} + e^{R_X})$

$$= \frac{\mathrm{ad} X}{2 \sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}} \circ \left(e^{-\frac{L_X}{2}} \circ e^{-\frac{R_X}{2}} \circ e^{L_X} + e^{-\frac{L_X}{2}} \circ e^{-\frac{R_X}{2}} \circ e^{R_X} \right)$$

$e^{-\frac{R_X}{2}} \circ e^{L_X} = e^{L_X} \circ e^{-\frac{R_X}{2}}$

$$= \frac{\mathrm{ad} X}{2 \sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}} \circ \left(e^{\frac{L_X}{2}} \circ e^{-\frac{R_X}{2}} + e^{-\frac{L_X}{2}} \circ e^{\frac{R_X}{2}} \right)$$

$[L_X, R_X] = 0$
$\Rightarrow e^{\frac{L_X}{2}} e^{-\frac{R_X}{2}} = e^{\frac{L_X - R_X}{2}}$

$$= \frac{\mathrm{ad} X}{2 \sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}} \circ \left(e^{\frac{L_X - R_X}{2}} + e^{-\left(\frac{L_X - R_X}{2}\right)} \right)$$

$$= \frac{\mathrm{ad} X}{2 \sinh \frac{\mathrm{ad} X}{2}} \quad \frac{\cosh \frac{\mathrm{ad} X}{2}}{2} = \mathrm{ad} X \circ \coth \frac{\mathrm{ad} X}{2} .$$

<u>Dem du thm:</u>

($\Rightarrow$) Supposons que $[X, [X, Y]] \in E \quad \forall X, Y \in E$.
Soient $e, f \in \mathcal{E} = \exp E$. Notons $Y \in E$ tq $e = \exp Y$.
Il s'agit de montrer que $efe \in \mathcal{E}$.
Considérons la courbe

$$X(t) = \log(\exp tY \cdot f \cdot \exp tY)$$

On a : $\exp X(t) = \exp tY \cdot f \cdot \exp tY$
En particulier $\exp X(1) = e \cdot f \cdot e$
On va montrer que la courbe $X(t)$ de S est tangente au sous-espace vectoriel $E \subset S$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, i.e $\dot{X}(t) \in E \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Il en résultera que $X(t) \in E \quad \forall t \in \mathbb{R}$ comme solution d'une équation diff ds l'espace vectoriel E.

Calculons :

$$\frac{d}{dt}_{|t_0} \exp X(t) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \exp(t_0+s)Y \cdot f \cdot \exp(t_0+s)Y$$

$$= \frac{d}{ds}_{|s=0} \exp sY \cdot \exp t_0 Y \cdot f \cdot \exp t_0 Y \cdot \exp sY$$

$$= Y \exp t_0 Y \cdot f \cdot \exp t_0 Y + \exp t_0 Y \cdot f \cdot \exp t_0 Y \cdot Y$$

$$= Y \cdot \exp X(t_0) + \exp X(t_0) \cdot Y$$

$$= a_{X(t_0)}(Y).$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt}_{|t_0} \exp X(t) = D_{X(t_0)} \exp (\dot{X}(t_0))$$

Ainsi $\dot{X}(t_0) = \left(D_{X(t_0)} \exp\right)^{-1} \circ a_{X(t_0)}(Y)$

$$= \gamma_{X(t_0)}(Y) = \operatorname{ad} X(t_0) \circ \coth \frac{\operatorname{ad} X(t_0)}{2} (Y).$$

Considérons le champ de vecteurs sur S défini par : $\mathcal{X} : U \in S \longmapsto \operatorname{ad} U \circ \coth \frac{\operatorname{ad} U}{2}(Y) \in T_U S$

Alors $\forall U \in E$, $\operatorname{ad} U \circ \coth \frac{\operatorname{ad} U}{2} (Y) \in E \simeq T_U E$.

En effet la série $\operatorname{ad} U \circ \coth \frac{\operatorname{ad} U}{2}$ ne fait intervenir que des puissances paires de $\operatorname{ad} U$ et par hypothèse $\operatorname{ad} U \circ \operatorname{ad} U (Y) \in E$.

Il en résulte que la courbe intégrale du champ de vecteurs $\mathcal{X}$ passant par $X(0) = \log f \in E$ en $t=0$ est entièrement contenue dans E, i.e. $X(t) = \log(\exp tY \cdot f \cdot \exp tY) \in E \ \forall t \in \mathbb{R}$

d'où $X(1) = \log(\exp Y \cdot f \cdot \exp Y) \in E$ et $efe \in \exp E$.

($\Leftarrow$) Supposons que $e.f.e \in \mathcal{E}$ $\forall e, f \in \mathcal{E}$
Soient X et $Y \in E$. Considérons la courbe

$$X(t) = \log\left(\exp tY . \exp X . \exp tY\right)$$

Par les calculs précédents

$$\dot{X}(t) = \operatorname{ad} X(t) \circ \coth \frac{\operatorname{ad} X(t)}{2} (Y)$$

De plus, comme $\exp tY . \exp X . \exp tY \in \mathcal{E}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in E$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dot{\gamma}(t) \in E$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et toutes les limites que l'on peut construire à partir de $\gamma(t)$ appartiennent à E. En particulier

$$Z = \lim_{t \to 0} \frac{\dot{X}(t) - \dot{X}(0)}{t^2} \in E.$$

On a : $X(0) = \log \exp X = X$

$$\dot{X}(0) = \operatorname{ad} X(0) \circ \coth \frac{\operatorname{ad} X(0)}{2} (Y) = \operatorname{ad} X \circ \coth \frac{\operatorname{ad} X}{2} (Y).$$

D'où :

$$Z = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(\frac{1 + \left(\frac{1}{12}\right) t^2 (\operatorname{ad} X(t))^2 (Y) - Y}{t^2} + tW \right)$$

où W dépend continûment de t
(en particulier $\lim_{t \to 0} tW = 0$)

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{1}{12} [X(0), [X(0), Y]] = \frac{1}{12} [X, [X, Y]] \in E$$

<u>Déf</u>: On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ d'une variété riemannienne est totalement géodésique si et seulement si toute géodésique partant d'un point de $\mathcal{E}$ avec un vecteur vitesse tangent à $\mathcal{E}$ est contenue dans $\mathcal{E}$.

<u>Prop</u>: Soit E un sous-espace vectoriel de S tel que $[X, [X, Y]] \in E$ $\forall X, Y \in E$. Alors $\mathcal{E} = \exp E$ est tot. géodésique.

<u>Dem</u>: Les géodésiques de $\mathcal{P}$ partant de I sont de la forme $t \mapsto \exp tX$ avec $X \in S$. Ainsi, par définition, $\mathcal{E} := \exp E$ contient toute géodésique partant de I avec un vecteur vitesse $X \in E$. De plus, d'après le thm précédent $efe \in \mathcal{E}$ $\forall e, f \in \mathcal{E}$. Par conséquent $\begin{cases} \forall p \in \mathcal{E}, \\ \forall X \in E \end{cases}$, $t \mapsto p^{1/2} \exp tX \, p^{1/2}$

est une géodésique (comme image de la géodésique $t \mapsto \exp tX$ par l'isométrie $x \mapsto p^{1/2} x \, p^{1/2}$) contenue dans $\mathcal{E}$. En particulier $T_p\mathcal{E} \supset p^{1/2} E \, p^{1/2}$ et on a égalité de dimension donc $T_p \mathcal{E} = p^{1/2} E \, p^{1/2}$. Ainsi $\mathcal{E} = \exp E$ contient toute géodésique partant d'un point $p \in \mathcal{E}$ avec un vecteur vitesse $Y = p^{1/2} X \, p^{1/2} \in p^{1/2} E \, p^{1/2} = T_p\mathcal{E}$ tangent à $\mathcal{E}$.

<u>Déf</u>: On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ d'une variété riemannienne est géodésiquement convexe s'il contient toute géodésique minimisant la longueur entre deux de ses points.

<u>Prop</u>: Soit E un sous-espace vectoriel de S tq $[X, [X, Y]] \in E$ $\forall X, Y \in E$. Alors $\mathcal{E} := \exp E$ est géodésiquement convexe.

<u>Dem</u>: $\forall p \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E} = \exp E$ contient la courbe minimisant la longueur de I à p, à savoir la courbe $t \mapsto \exp t \log p$ (car $\log p \in E$). $\forall q \in \mathcal{E}$, $\forall p \in \mathcal{E}$ la courbe minimisant la longueur de p à q est $t \mapsto p^{1/2} (\exp t \operatorname{Log}(p^{-1/2} q \, p^{-1/2})) \, p^{1/2}$. Or par le thm précédent $p^{-1/2} q \, p^{-1/2} \in \mathcal{E}$ donc $\operatorname{Log}(p^{-1/2} q \, p^{-1/2}) \in E$ et $t \mapsto \exp t \operatorname{Log}(p^{-1/2} q \, p^{-1/2}) \in \mathcal{E}$ $\forall t \in [0,1]$ et en appliquant de nouveau le thm précédent $t \mapsto p^{1/2} (\exp t \operatorname{Log}(p^{-1/2} q \, p^{-1/2})) \, p^{1/2}$ est contenue dans $\mathcal{E}$ $\forall t \in [0,1]$.

Rque: Dans ce contexte, les notions de sous-espaces totalement géodésiques et de sous-espaces géodésiquement convexes coïncident. (ça provient de l'unicité de la géodésique joignant 2 points).

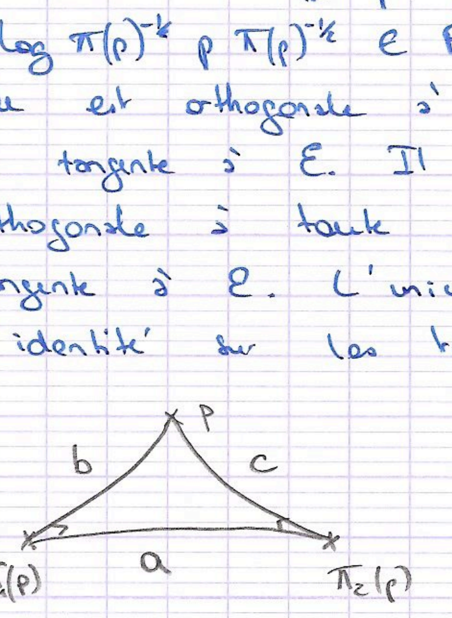
e. Projection sur $\mathcal{E}$:

Thm: Soit E un sev de S tq $[X,[X,Y]] \in E \ \forall X, Y \in E$
Alors il existe une projection continue $\pi : \mathcal{P} \to \exp E = \mathcal{E}$ telle que $\forall p \in \mathcal{P}$, $\pi(p)$ satisfait :

1) $d(p, \mathcal{E}) = d(p, \pi(p))$
où $d(p,q) = \min\limits_{\substack{\gamma : \gamma(0)=p \\ \gamma(1)=q}} L(\gamma)$ est la distance entre deux points $p, q \in \mathcal{P}$
et $d(p, \mathcal{E}) = \min\limits_{q \in \mathcal{E}} d(p,q)$.

2) la courbe minimisant la longueur de p à $\pi(p)$ est orthogonale à toute géodésique partant de $\pi(p)$ et tangente à $\mathcal{E}$.

Dem (idées) : $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathcal{P}$. La distance de p à $\mathcal{E}$ est atteinte en un point $\pi(p) \in \mathcal{E}$. Notons α la géodésique joignant p à $\pi(p)$. Alors $\pi(p)^{-1/2} \alpha \, \pi(p)^{-1/2}$ est la géodésique joignant $\pi(p)^{-1/2} p \, \pi(p)^{-1/2}$ à I. C'est donc $t \mapsto \exp (1-t) \log \pi(p)^{-1/2} p \, \pi(p)^{-1/2}$ avec $t \in [0,1]$. Comme cette courbe minimise la distance de $\pi(p)^{-1/2} p \, \pi(p)^{-1/2}$ à $\mathcal{E} = \exp E$, on a $\log \pi(p)^{-1/2} p \, \pi(p)^{-1/2} \in F$ où $F = E^{\perp}$. En particulier elle est orthogonale à toute géodésique partant de I et tangente à $\mathcal{E}$. Il en résulte que α est orthogonale à toute géodésique partant de $\pi(p)$ et tangente à $\mathcal{E}$. L'unicité de $\pi(p)$ provient de l'identité sur les triangles :



$$\left.\begin{array}{l} c^2 \geq a^2 + b^2 \\ b^2 \geq c^2 + a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \pi_1(p) = \pi_2(p)$$

<u>Dem du Lemme 1 :</u> 1) <u>Existence :</u>

Soit E un sev de S tq $(X, [X, Y]) \in E$ $\forall X, Y \in E$ et $F = E^{\perp}$. Soit $p \in \mathcal{S}$, alors

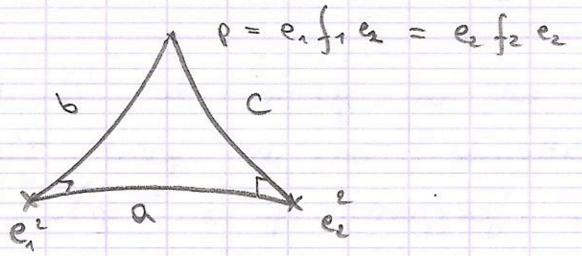
$$p = \pi(p)^{1/2} \left(\pi(p)^{-1/2} \, p \, \pi(p)^{-1/2} \right) \pi(p)^{1/2}$$

et $\pi(p)^{1/2} \in \exp E$ et $\pi(p)^{-1/2} \, p \, \pi(p)^{-1/2} \in \exp F$.

2) <u>Unicité :</u>

Supposons que $p = e_1 f_1 e_1 = e_2 f_2 e_2$ avec $e_1, e_2 \in \exp E$ et $f_1, f_2 \in \exp F$

Alors la courbe minimisant la longueur entre p et e_1^2 (resp. e_2^2) est orthogonale à $\exp E = \mathcal{E}$ car égale à $t \mapsto e_1 \exp((1-t) \log f_1) e_1$ (resp $t \mapsto e_2 \exp((1-t) \log f_2) e_2$). On a alors :



car la géodésique joignant e_1^2 à e_2^2 est contenue dans $\exp E = \mathcal{E}$. L'identité sur les triangles implique alors $a = 0$ donc $e_1^2 = e_2^2$ $\Rightarrow e_1 = e_2 \Rightarrow f_1 = f_2$.

2. Décompositions de Cartan, Iwasawa et Bruhat

cf feuille de TD n° 5.