Chapitre 6 : Des algèbres de Lie aux groupes de Lie

1. Bijection entre sous-groupes connexes et sous-algèbres de Lie

Soit G un groupe de Lie.

Rappel : On a montré que l'application

$$\{\text{sous-groupe de Lie } H \text{ de } G\} \longrightarrow \{\text{sous-algèbre de Lie } \mathfrak{h} \text{ de Lie } G\}$$
$$H \longmapsto \operatorname{Lie}(H)$$

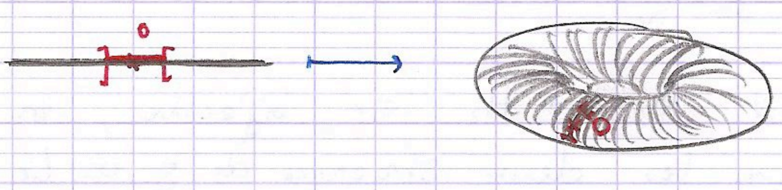
est injective (cf chapitre 3, section 4).

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Thm : Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} =: \operatorname{Lie} G$. On note H le sous-groupe engendré par $\exp_G(\mathfrak{h})$. Alors il existe sur H une structure de groupe de Lie connexe et une seule telle que l'inclusion $H \hookrightarrow G$ soit une immersion qui induise un isomorphisme $\operatorname{Lie} H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$.

⚠ En général, la structure de groupe de Lie de H n'en fait pas un sous-groupe de Lie de G, i.e. H n'est pas nécessairement une sous-variété de G.

Ex :
$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$
$$t \longmapsto [t(1+a)]_{\mathbb{Z}^2} = \text{classe modulo } \mathbb{Z}^2$$



Dem du thm :

1) **Unicité** : Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $H = \langle \exp_G \mathfrak{h} \rangle$ le sous-groupe engendré par $\mathfrak{h}$

ie $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\exp_G \mathfrak{h})^n$ où $(\exp_G \mathfrak{h})^n = \{ h_1 \dots h_n \, , \, h_i \in \exp_G \mathfrak{h} \}$

Soient H_1 et H_2 deux structures de groupe de Lie sur H telles que $i_1 : H_1 \hookrightarrow G$ et $i_2 : H_2 \hookrightarrow G$ soient des immersions telles que $\mathrm{Lie}(H_1) \underset{Di_1}{\xrightarrow{\sim}} \mathfrak{h} \underset{Di_2}{\xleftarrow{\sim}} \mathrm{Lie}\, H_2$

Alors :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lie}(H_1) \arrow[r, "\sim", "Di_1"'] \arrow[d, "\exp_{H_1}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, hook] & \mathrm{Lie}(H_2) \arrow[l, "\sim"', "Di_2"] \arrow[d, "\exp_{H_2}"] \\
H_1 \arrow[dr, hook] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp_G"] & H_2 \arrow[dl, hook'] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Comme l'exponentielle $\exp_{H_1}$ (resp. $\exp_{H_2}$) est un difféomorphisme local d'un voisinage $0 \in U_1 \subset \mathrm{Lie}(H_1)$ (resp. $0 \in U_2 \subset \mathrm{Lie}(H_2)$) sur un voisinage $V_1 \subset H_1$ contenant e (resp. $V_2 \subset H_2$), l'application identité $id : H_1 \longrightarrow H_2$ est un difféo local de $\exp_{H_1} \circ Di_1^{-1} (Di_1(U_1) \cap Di_2(U_2)) \ni e$ sur
$\exp_{H_2} \circ Di_2^{-1} (Di_2(U_2) \cap Di_1(U_1)) \ni e$.

Comme la translation à gauche par $h \in H$ est un difféomorphisme pour les structures de groupe de Lie H_1 et H_2, l'identité : $H_1 \longrightarrow H_2$ est un difféo local en tout point $h \in H$:

$$id = \underbrace{L_h}_{\substack{\text{translation} \\ \text{à gauche} \\ \text{dans } H_2}} \circ \underbrace{L_{h^{-1}} \circ id \circ L_h}_{\substack{\text{application identité} \\ \text{au vois de } e}} \circ \underbrace{L_{h^{-1}}}_{\text{translation à gauche de } H_1}$$

Comme $id : H_1 \longrightarrow H_2$ est bijective, on en déduit que les deux structures de g de Lie sont difféomorphes

2) Existence : A partir d'un ouvert T de $\mathfrak{g}$ contenant 0 (relativement bien choisi), on va construire une topologie sur H qui en fait un groupe topologique et telle que $\exp_G : T\cap\mathfrak{h} \longrightarrow \exp_G(T\cap\mathfrak{h})$ soit un homéomorphisme.

Alors pour tout $g\in H$, l'ensemble $L_g\circ\exp_G(T\cap\mathfrak{h})$ sera ouvert (la translation à gauche par $g\in H$ doit être continue) et l'ensemble de cartes $\{(L_g\circ\exp_G(T\cap\mathfrak{h}),\ \exp_G^{-1}\circ L_g^{-1}),\ g\in H\}$ sera $\mathcal{C}^\infty$ compatible. En effet, sur l'intersection de deux cartes, l'application de changement de cartes est la bijection :

$$\begin{array}{c} \exp_G^{-1}\circ L_{g_1}^{-1}\left(L_{g_1}\circ\exp_G(T\cap\mathfrak{h})\cap L_{g_2}\circ\exp(T\cap\mathfrak{h})\right)\subset T\cap\mathfrak{h}\subset T\subset\mathfrak{g} \\ \Big\downarrow \exp_G^{-1}\circ L_{g_2}^{-1}\circ L_{g_1}\circ\exp_G \\ \exp_G^{-1}\circ L_{g_2}^{-1}\left(L_{g_1}\circ\exp_G(T\cap\mathfrak{h})\cap L_{g_2}\circ\exp(T\cap\mathfrak{h})\right)\subset T\cap\mathfrak{h}\subset T\subset\mathfrak{g} \end{array}$$

qui est $\mathcal{C}^\infty$ comme restriction de l'application $\mathcal{C}^\infty$ $\exp_G^{-1}\circ L_{g_2}^{-1}\circ L_{g_1}\circ\exp_G$ de l'ouvert $L_{g_1}\circ\exp_G(T)\cap L_{g_2}\circ\exp_G(T)$ de G (il faut pour cela choisir T tq $\exp_G : T\to\exp_G T$ soit un difféo).

De plus, puisque $\exp_G^{-1} : \exp(T\cap\mathfrak{h})\to T\cap\mathfrak{h}$ est une carte de H, l'espace tangent en $e\in H$ à H s'identifie à $\mathfrak{h}$.

Construisons donc T. Soit $V\subset\mathfrak{g}$ un voisinage ouvert de $0\in\mathfrak{g}$ tq $\exp_G : V\to\exp_G(V)$ soit un difféomorphisme. Soit $U\subset V$ un voisinage ouvert de 0 étoilé ($\forall X\in U$, $tX\in U$ pour $t\in[0,1]$) et symétrique ($\forall X\in U$, $-X\in U$) tel que $\exp_G U\cdot\exp_G U\subset\exp_G V$. En particulier, si $X, Y\in U$:

$$\exp_G X\,\exp_G Y = \exp_G(\mathcal{H}(X,Y))$$

où $\mathcal{H}(X,Y)$ est donné par la formule de Campbell-Hausdorff. Si $X,Y\in U\cap\mathfrak{h}$ alors $\mathcal{H}(X,Y)\in V\cap\mathfrak{h}$.

On prend alors $T \subset U$ un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$ qui soit <u>symétrique</u> et tel que $\exp_G T . \exp_G T \subset \exp_G U$.

Une base d'ouverts pour la topologie de H est alors $\{ L_g \circ \exp_G (W \cap \mathfrak{h})$, où $g \in H$ et W voisinage ouvert de $0 \subset T \}$

Montrons que $\exp_G : T \cap \mathfrak{h} \longrightarrow \exp_G (T \cap \mathfrak{h})$ est un homéomorphisme pour cette topologie sur H. Comme c'est une bijection et que $T \cap \mathfrak{h}$ est localement compact, il suffit de montrer que $\exp_G : T \cap \mathfrak{h} \longrightarrow \exp_G (T \cap \mathfrak{h}) \subset H$ est continue pour cette topologie. Soient $g \in H$ et W un voisinage ouvert de 0 inclus dans T tels que $L_g \exp_G (W \cap \mathfrak{h}) \cap \exp_G (T \cap \mathfrak{h}) \neq \emptyset$. Il faut montrer que $\exp_G^{-1} (L_g \exp_G (W \cap \mathfrak{h}) \cap \exp_G (T \cap \mathfrak{h}))$ est un ouvert de $T \cap \mathfrak{h}$. Considérons un $x \in L_g \exp_G (W \cap \mathfrak{h}) \cap \exp_G (T \cap \mathfrak{h})$.
Alors $x = g \exp_G w = \exp_G t$ où $w \in W \cap \mathfrak{h}$ et $t \in T \cap \mathfrak{h}$.
Ainsi $g = \exp_G t \exp(-w)$. Comme T est <u>symétrique</u> $\exp(-w) \in T$ et comme $\exp_G T . \exp_G T \subset \exp_G U$ on a :

$$g = \exp_G u \quad \text{où} \quad u = \mathcal{H}(t, -w) \in U \cap \mathfrak{h}.$$

Alors l'ensemble $\exp_G^{-1} (L_g \exp_G (W \cap \mathfrak{h}) \cap \exp_G (T \cap \mathfrak{h}))$ est composé des éléments $X \in T \cap \mathfrak{h}$ tels que

(on utilise ici que $\exp_G U \exp_G U \subset \exp_G V$) : $\exp_G X = \exp_G u \exp_G v$, $v \in W \cap \mathfrak{h}$

i.e. $X \in \mathcal{H}(u, W \cap \mathfrak{h}) \cap T \cap \mathfrak{h}$ qui est un ouvert.
(cf formule de CBH : $\mathcal{H}(u, v)$ est continue)

Montrons que H, muni de cette topologie est un groupe topologique, c'est-à-dire que la multiplication $H \times H \to H$ et l'inversion : $H \to H$ sont continues.
-) Par définition de la base d'ouverts, les translations à gauche sont continues.

2) la multiplication dans H est continue en tout point de $\exp_G T\cap\mathfrak{h} \times \exp_G T\cap\mathfrak{h}$ car $\forall g_1 = \exp_G X_1,\ g_2 = \exp_G X_2$

$$g_1 g_2 = \exp_G X_1 \exp_G X_2 = \exp_G H(X_1, X_2)$$

et l'application $(g_1, g_2) \xrightarrow[\exp_G^{-1}|_{T\cap\mathfrak{h}}]{} (X_1, X_2) \longrightarrow H(X_1, X_2) \xrightarrow[\exp_G]{} g_1 g_2$ est continue

3) $\forall g \in H$, la conjugaison $c_g : H \to H$ est continue en $e \in H$ car : $g = \exp_G X_1 \exp_G X_2 \dots \exp_G X_n$ avec $X_i \in \mathfrak{h}$ et $c_g = c_{\exp X_1} \circ \dots \circ c_{\exp_G X_n}$, où les $c_{\exp X_i}$ sont continues en $e \in H$ puisque $\forall h \in \exp_G(T\cap\mathfrak{h})$, $h = \exp_G u$:

$$\begin{aligned} c_{\exp X_1}(h) &= \exp_G X_1 \exp_G u \exp_G(-X_1) \\ &= \exp_G\left(Ad(\exp_G X_1)(u)\right) \\ &= \exp_G\left(e^{\mathrm{ad} X_1}(u)\right) \end{aligned}$$

4) L'inversion est continue au voisinage de $e \in H$ car $\forall g \in \exp_G(T\cap\mathfrak{h})$, $g^{-1} = (\exp_G X)^{-1} = \exp_G(-X)$.

5) Montrons que l'inversion est continue au voisinage de n'importe quel point $g_0 \in H$. Soit W un vois. ouvert de $e \in H$ dans G. Il s'agit de montrer que $\mathrm{inv}(g_0 \exp_G W\cap\mathfrak{h})$ est un ouvert de H. Or

$$\begin{aligned} g \in g_0 \exp_G W\cap\mathfrak{h} &\Leftrightarrow g_0^{-1} g \in \exp_G W\cap\mathfrak{h} \\ &\Leftrightarrow g^{-1} g_0 \in \exp_G(-W\cap\mathfrak{h}) \\ &\Leftrightarrow g^{-1} \in \exp_G(-W\cap\mathfrak{h})\, g_0 = g_0 g_0^{-1} \exp(-W\cap\mathfrak{h})\, g_0 \\ &\Leftrightarrow g^{-1} \in \underbrace{L_{g_0} \circ \underbrace{c_{g_0^{-1}} \underbrace{\exp_G \underbrace{(-W\cap\mathfrak{h})}_{\text{vois de } 0}}_{\text{vois de } e \in H}}_{\text{ouvert car } c_{g_0}^{-1} \text{ est continue en } e}}_{\text{ouvert de } H \text{ car } L_{g_0} \text{ est continue}} \end{aligned}$$

6) Montrons que la multiplication est continue au voisinage de n'importe quel couple de points $(g_0, h_0) \in H\times H$. Soit W un voisinage ouvert de e dans G contenu dans T et considérons l'image réciproque de $g_0 h_0 \exp_G W\cap\mathfrak{h}$ par la multiplication de H. On a : $gh \in g_0 h_0 \exp_G W\cap\mathfrak{h} \Leftrightarrow$

$$h_0^{-1} g_0^{-1} g h \in \exp_G(W \cap \mathfrak{h}) \Leftrightarrow h_0^{-1} g_0^{-1} g h h_0^{-1} h_0 \in \exp_G(W \cap \mathfrak{h})$$

$$\Leftrightarrow g_0^{-1} g h h_0^{-1} \in \underbrace{C_{h_0}(\exp_G(W \cap \mathfrak{h}))}_{\text{ouvert car la conjugaison est continue en } e}$$

$$\Leftrightarrow (g_0^{-1} g, h h_0^{-1}) \in \underbrace{m^{-1}(C_{h_0}(\exp_G(W \cap \mathfrak{h})))}_{\text{image réciproque par la multiplication de } H \text{ d'un voisinage de } e \text{ ouvert par 2)}}$$

$$\Leftrightarrow (g, h) \in (L_{g_0}, L_{h_0} \circ C_{h_0^{-1}})(\;''\;)$$

$$(L_{g_0}, L_{h_0} \circ C_{h_0^{-1}})(u, v) = (g_0 u, h_0 h_0^{-1} v h_0)$$

$$\Leftrightarrow (g, h) \in \text{ouvert par 3) et 1)}.$$

<u>Corollaire</u>: Soit G un groupe de Lie. Il y a une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G qui sont des groupes de Lie tels que $i : H \hookrightarrow G$ soit une immersion, et l'ensemble des sous-algèbres de Lie de $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$

<u>Prop</u>: Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe de G ayant une structure de groupe de Lie telle que $i : H \hookrightarrow G$ soit une immersion. Alors H est une sous-variété de G (donc un sous-groupe <u>de Lie</u> de G) ssi H est fermé.

<u>Dem</u>: • Si H est fermé le théorème de Von Neumann implique que H est une sous-variété de G.

• Si H est une sous-variété de G, H est localement fermé dans G (dans une carte adaptée de G, H correspond à la trace d'un sev de $\mathbb{R}^n$).

Montrons qu'un sous-groupe localement fermé d'un groupe topologique est fermé : notons $\bar{H}$ l'adhérence de H dans G. C'est encore un groupe topologique.

- H est ouvert dans $\bar{H}$. En effet, si $x \in \mathring{H}$ intérieur de H alors $\mathring{H}$ est la trace d'un ouvert de G avec $\bar{H}$ c'est donc un ouvert de $\bar{H}$ qui contient x. Si $x \in \bar{H} \setminus \mathring{H}$, alors tout ouvert V de G contenant x intersecte H et $x \in V \cap \bar{H}$ est un ouvert de $\bar{H}$ contenant x.
- H est aussi fermé dans $\bar{H}$ car $\bar{H}$ se partitionne en classes à gauche modulo H :

$$\bar{H} = H \coprod_{\substack{g \notin H \\ g \in R}} gH$$ où R est un ensemble de représentants des classes à gauche

$$\Rightarrow H = \bar{H} \setminus \coprod_{\substack{g \notin H \\ g \in R}} gH$$ avec $gH = L_g(H)$ ouvert $\underset{\text{de } \bar{H}}{}$ car H est ouvert et la translation à gauche par g continue.

$\Rightarrow$ H est fermé dans $\bar{H}$

- Comme H est dense dans $\bar{H}$ et qu'il est à la fois ouvert et fermé dans $\bar{H}$, $H = \bar{H}$.

2. Revêtement universel d'un groupe de Lie

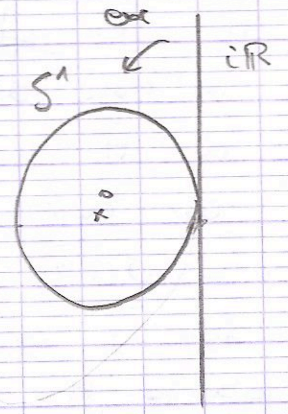
a. Revêtement de variétés :

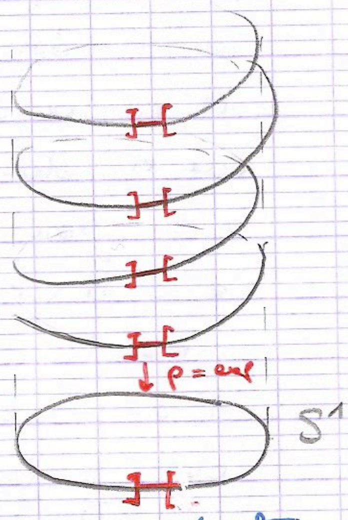
Déf : Un revêtement de variétés est une application différentiable $p : N \to M$ entre deux variétés telle que

1) p est surjective
2) $\forall m \in M$, il existe un voisinage ouvert V de m tel que $p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$ soit une union disjointe d'ouverts U_i de N tels que $\forall i \in I$, $p : U_i \to V$ soit un difféomorphisme

0) Revêtement trivial : $\begin{array}{c} M \times N \\ \downarrow \\ M \end{array}$

<u>Ex</u> : 1) $\exp : i\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ est un revêtement
$\qquad\qquad it \longmapsto e^{it}$
de variétés.

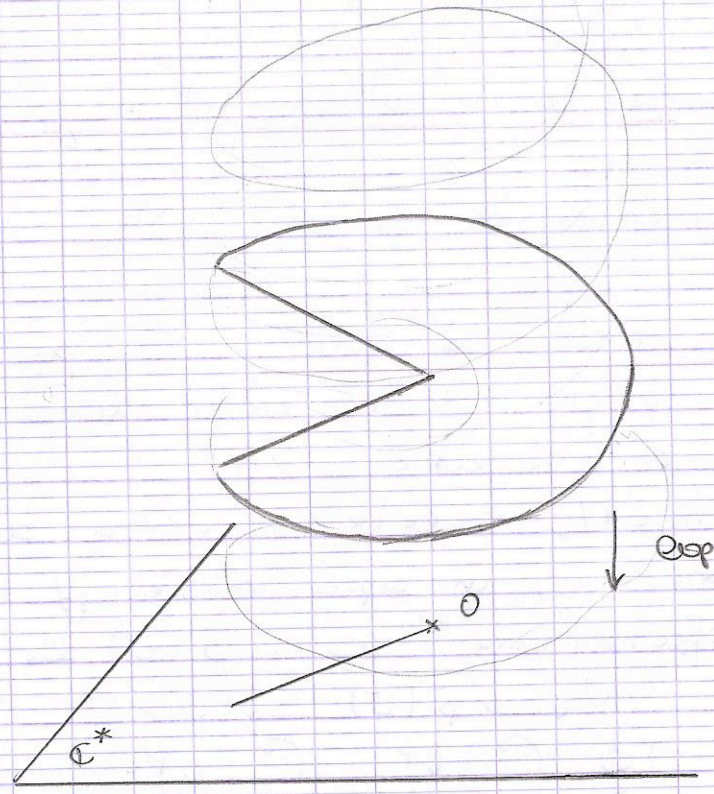




$\forall\, e^{i\theta_0} \in S^1$, $\exists\,]\theta_1, \theta_2[$ de longueur $< 2\pi$ tel que $\theta_0 \in]\theta_1, \theta_2[$. Alors $U = \{e^{it},\ t \in]\theta_1, \theta_2[\}$ est un voisinage ouvert de $e^{i\theta_0} \in S^1$ tel que

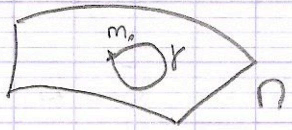
$$\exp^{-1}(U) = \underbrace{\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}}}_{\text{union disjointe}} \left( ]\theta_1, \theta_2[+ 2ik\pi \right) \simeq\ ]\theta_1, \theta_2[\times \mathbb{Z}$$

2) $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement de variétés
$\qquad\qquad z \longmapsto e^z$



3) $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $z \longmapsto z^n$ est un revêtement mais pas $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^n$

<u>Déf:</u> Soit (M, m_0) une variété pointé, i.e. une variété M sur laquelle on a distingué un point m_0. Un <u>lacet</u> de (M, m_0) est une application différentiable $\gamma : [0,1] \to M$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = m_0$.



On dit que deux lacets γ_1 et γ_2 sont <u>homotopes</u> s'il existe une application $\mathcal{C}^\infty$

$$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M \text{ telle que}$$
$$f(0,s) = \gamma_1(s) \quad \forall s \in [0,1]$$
$$f(1,s) = \gamma_2(s) \quad \forall s \in [0,1]$$
$$f(t,0) = f(t,1) = m_0 \quad \forall t \in [0,1].$$

On appelle <u>composition</u> de deux lacets γ_1 et γ_2 le lacet $\gamma_3 := \gamma_1 * \gamma_2$ défini par:

$$\gamma_3(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

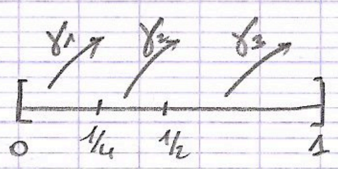
<u>Rque:</u> L'homotopie définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de (M, m_0).

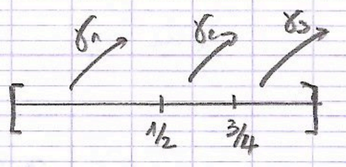
<u>Prop:</u> L'ensemble des classes d'équivalence de lacets modulo homotopie forme un groupe appelé <u>groupe fondamental</u> de (M, m_0) et noté

$$\pi_1(M, m_0) = \{\text{lacets}\} / \text{homotopie}$$

<u>Dem:</u> - la composition passe au quotient : si γ_1 est homotope à β_1 et γ_2 homotope à β_2 alors $\gamma_1 * \gamma_2$ est homotope à $\beta_1 * \beta_2$.
- la composition des lacets est associatives modulo homotopie

$\forall\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ lacets de (M, m_0),
$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ est homotope à $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$





- Modulo homotopie, la composition admet le lacet constant $\gamma(s) = m_0\ \forall\ s \in [0,1]$ comme élément neutre.
- Modulo homotopie, tout lacet admet un inverse $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1-s)$.

Déf: On dit qu'une variété M est simplement connexe si M est connexe (par arc) et si $\pi_1(M, m_0) = \{e\}\ \forall\ m_0 \in M$. Autrement dit, M est simplement connexe ssi tout lacet de M est homotope à 1 point.

Rque: 0) connexe + loc. connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe par arcs

1) Si M est connexe (par arcs), alors $\pi_1(M, m_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, m_1)$ $\forall\ m_0, m_1 \in M$.

2) On peut montrer que:

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ = groupe libre à un générateur $\simeq \mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ = groupe libre à n générateurs (non-commutatif si $n > 1$)

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\pi_1(M_1 \times M_2) = \pi_1(M_1) \times \pi_1(M_2)$ si M_1 et M_2 sont connexes par arcs.

$\pi_1(S^n) = \{e\}$ si $n \geq 2$

Déf: Une variété M est dite contractile s'il existe une application différentiable $f : [0,1] \times M \to M$ telle que
$f(1, \cdot) = id_M : \begin{array}{l} M \to M \\ m \mapsto m \end{array}$ et $f(0, \cdot) : \begin{array}{l} M \to M \\ m \mapsto m_0 \end{array}$

Exemples :

1) Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est contractile car l'application
$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(t, \vec{v}) \longmapsto t\vec{v}$$
envoie $\mathbb{R}^n$ sur $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

2) Tout convexe d'un espace vectoriel réel est contractile

3) Tout espace étoilé est contractile.

Rque : Si M est contractile, M est connexe par arcs et simplement connexe.

Application : Si S désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles, alors $\mathcal{P} = \exp S$ est contractile car difféomorphe à S (homéomorphe aurait suffit).

Thm : Soit M une variété connexe. Alors il existe un revêtement de variété $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ tel que $\tilde{M}$ soit simplement connexe. De plus $\tilde{M}$ est unique à isomorphisme unique près. On l'appelle le revêtement universel de M.

Thm : (Relèvement des applications)
Soit M une variété connexe et simplement connexe et soit $m_0 \in M$. Soit $p : P \longrightarrow N$ un revêtement d'une variété N et $y_0 \in P$ tq $p(y_0) = x_0 \in N$. Alors toute application différentiable $f : M \longrightarrow N$ qui envoie m_0 sur x_0 se relève en une unique application $\tilde{f} : M \longrightarrow P$ qui envoie m_0 sur y_0, i.e. tq $p \circ \tilde{f} = p$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "p"] & y_0 \arrow[d, mapsto] \\ M \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & N & x_0 \\ m_0 \arrow[r, mapsto] & x_0 & \end{tikzcd}$$

Prop: Si Ω est une variété simplement connexe, alors tout revêtement de G est trivial. Si le revêtement est connexe, alors il est difféomorphe à Ω.

b. Revêtements de groupes de Lie

Prop: Le groupe fondamental d'un groupe de Lie est commutatif.

Lemme: Soit G un groupe de Lie et γ_1, γ_2 deux lacets issus de e_G (i.e. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = e_G$). Alors le lacet γ produit de γ_1 et γ_2 dans G:

$$\gamma : s \longmapsto \gamma(s) = \underbrace{\gamma_1(s) . \gamma_2(s)}_{\text{produit dans } G}$$

est homotope à la composition de γ_1 et γ_2 : $\gamma_1 * \gamma_2$ défini par :

$$\gamma_1 * \gamma_2 (s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \gamma_2(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Dem du lemme:
On définit $\alpha_1(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ e_G & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$

Alors γ_1 et α_1 sont homotopes par l'homotopie suivante

$$h(t,s) = \begin{cases} e_G & \text{si } s \geq 1 - t/2 \\ \gamma_1\left(\frac{s}{1 - t/2}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 - t/2 \end{cases}$$

De même, γ_2 est homotope au lacet

$$\alpha_2(s) = \begin{cases} \gamma_2(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \\ e_G & 0 \leq s \leq 1/2 \end{cases}$$

Alors modulo homotopie, on a

$$[\gamma] = [\gamma_1 \cdot \gamma_2] = [\alpha_1 . \alpha_2] = [\alpha_1 * \alpha_2] = [\alpha_1] * [\alpha_2]$$
$$= [\gamma_1] * [\gamma_2].$$

Conséquence: $[\underbrace{\gamma_1^{-1}}_{\substack{t \mapsto \gamma_1(t)^{-1} \\ \text{inverse dans } G}}] = \underbrace{[\gamma_1]^{-1}}_{\substack{\text{inverse dans } \pi_1(G, e_G) \\ \text{donné par la classe du lacet } \gamma_1(1-s)}}$

Dem de la prop:
Etant donné deux lacets γ_1 et γ_2 de G (basés en e_G) alors γ_1 est homotope à $\gamma_2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ par l'homotopie

$$f(t,s) = \gamma_2(st) \cdot \gamma_1(s) \cdot \gamma_2(st)^{-1}$$

Donc modulo homotopie :

$$\begin{aligned} [\gamma_1] &= [\gamma_2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \\ &= [\gamma_2] * [\gamma_1] * [\gamma_2^{-1}] \\ &= [\gamma_2] * [\gamma_1] * [\gamma_2]^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_2] * [\gamma_1].$$

Prop: Soit $p : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie connexes. Alors il y a équivalence entre:
1) p est un revêtement de variétés
2) p est surjective et $\mathrm{Ker}\,p$ est un sous-groupe discret appartenant au centre de G.
3) $D_{e_G}p : \mathrm{Lie}\,G \longrightarrow \mathrm{Lie}\,H$ est un isomorphisme

Dem:
1) $\Rightarrow$ 2) : Si p est un revêtement, p est en particulier surjective. Soit U un voisinage ouvert de e_G dans H tel que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$ et $p : U_i \longrightarrow U$ difféo. Alors e_G appartient à un seul des U_i, disons U_0, et $\mathrm{Ker}\,p \cap U_0 = \{e_G\}$. Ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\,p$ est discret. De plus comme G est connexe $\mathrm{Ker}\,p$ appartient automatiquement au centre de G. En effet, étant donné $x \in \mathrm{Ker}\,p$, on considère l'application continue $\begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{Ker}\,p \\ g \longmapsto g x g^{-1} \end{array}$. Son image est connexe, et comme $\mathrm{Ker}\,p$ est discret, elle est réduite à $\{x\}$.

2) ⇒ 3) :
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp_G"] \arrow[r, "D_{e_G} p"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp_H"'] \end{tikzcd}$$
Comme p est un morphisme de groupes de Lie, on a $p(\exp_G X) = \exp_H(D_{e_G} p(X))$.

- Supposons que $\operatorname{Ker} D_{e_G} p \neq \{\vec{0}\}$. Alors $\operatorname{Ker} D_{e_G} p$ contient une droite $\mathcal{L}$ ($D_{e_G} p$ est une application linéaire). Mais $p(\exp_G \mathcal{L}) = \exp_H(D_{e_G} p(\mathcal{L})) = e_G$ et $\exp_G$ est un difféomorphisme au voisinage de 0. Donc $\exp_G \mathcal{L}$ est une courbe non constante passant par e_G et contenue dans le noyau de p. Or $\operatorname{Ker} p$ est supposé discret. Il y a donc contradiction et $\operatorname{Ker} D_{e_G} p = \{\vec{0}\}$.
- Comme H est connexe, il est engendré par un voisinage V de e_H : $H = \langle \exp_H(V) \rangle$ (sous-gr engendré). Comme p est surjective, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de G contenant e_G tel que $p(\mathcal{U}) \supset V$. Quitte à restreindre U et V on peut supposer que $\exp_G$ est un difféomorphisme d'un voisinage W de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$.

Alors $\forall v \in V$, $\exists u \in \mathcal{U}$ tq $p(u) = v$

$\exists X \in W$ tq $p(\exp_G X) = v$

Ainsi: $H = \langle \exp_H(V) \rangle = \langle p(\exp_G(W)) \rangle = \langle \exp_H D_{e_G} p(W) \rangle$

A fortiori: $H = \langle \exp_H D_{e_G} p(\mathfrak{g}) \rangle$. Mais $D_{e_G} p$ est un morphisme d'algèbres de Lie car p est un morphisme de groupes de Lie. Donc $D_{e_G} p(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$. Mais comme H est connexe, il est caractérisé par son algèbre de Lie donc $\mathfrak{h} = D_{e_G} p(\mathfrak{g})$ et $D_{e_G} p$ est surjective.

3) ⇒ 1) : Soit W un voisinage symétrique de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp_G : W \longrightarrow \exp_G(W)$ soit un difféomorphisme. Alors l'identité $p(\exp_G X) = \exp_H(D_{e_G} p(X))$ implique que $p = \exp_H \circ D_{e_G} p \circ \exp_G^{-1}$ sur $\exp_G(W) := \mathcal{U}$.

Comme $D_{e_G}p$ est un isomorphisme, p est un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur un ouvert $\mathcal{V}$ de H contenant e_H. Par conséquent, $\operatorname{Ker} p \cap \mathcal{U} = \{e_G\}$. Donc $\operatorname{Ker} p$ est un sous-groupe discret de G. Alors

$$p^{-1}(\mathcal{V}) = \coprod_{x \in \operatorname{Ker} p} \mathcal{U}.x = \coprod_{x \in \operatorname{Ker} p} \underbrace{R_x(\mathcal{U})}_{\text{translaté à droite de } \mathcal{U} \text{ par } x}$$

est une union disjointe d'ouverts sur lesquels p est un difféomorphisme :

$$p : \mathcal{U}.x \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$(g.x) \longmapsto p(g.x) = p(g).\underbrace{p(x)}_{=e_G} = p(g)$$

(car p est un homomorphisme de groupes et $x \in \operatorname{Ker} p$)

De plus, p est surjectif car p est un difféo local et H, étant connexe, est engendré par $\mathcal{V}$:

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p(\mathcal{U})^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p(\mathcal{U}^n)$$

car p est un morphisme de groupes.

Applications : A) $SU(2)$ est le revêtement universel de $SO(3,\mathbb{R})$:

On va montrer que :

1) $SO(3,\mathbb{R})$ est connexe par arcs
2) $SU(2)$ est difféomorphe à S^3 donc connexe et simplement connexe.
3) l'action Adjointe de $SU(2)$ sur son algèbre de Lie définit un revêtement de $SU(2)$ au-dessus de $SO(3)$.

1. $SO(n,\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc connexe) : $(n \geq 2)$

Soit $A \in SO(n,\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, $A^T A = Id$, $A A^T = Id$, $\det A = 1$.

On va montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que PAP^{-1} est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & 0 & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Comme $\det B = \det PAP^{-1} = \det A = 1$, il n'y a qu'un nombre pair de -1, que l'on peut grouper deux par deux dans des blocs de rotations de la forme $\begin{pmatrix} \cos\pi & +\sin\pi \\ -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$.

Notons alors $B(s)$ la matrice obtenue en remplaçant chaque bloc de rotation par : $\begin{pmatrix} \cos s\theta & +\sin s\theta \\ -\sin s\theta & \cos s\theta \end{pmatrix}$

Ainsi le chemin γ défini pour $s \in [0,1]$ par :
$\gamma(s) = P^{-1} B(s) P$ est un chemin différentiable, contenu dans $SO(n)$ et reliant l'identité à A.
Pour montrer l'existence de P et de B, on peut considérer A comme une matrice de $M(n,\mathbb{C})$, alors $A^* = \bar{A}^T = A^T$ commute à A car $A^* A = A A^* = Id$ donc A est diagonalisable dans une base unitaire de $\mathbb{C}^n$, i.e il existe $\tilde{P} \in U(n)$ tq $\tilde{P} A \tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

La condition $A^* A = Id$ implique $|\lambda_i| = 1$ et le fait que A soit à coefficients réels implique que si λ est valeur propre, $\bar{\lambda}$ est valeur propre ($\bar{\lambda}$ annule $\overline{P_{car}} = P_{car}$). Par conséquent, quitte à réordonner les vecteurs propres, on peut supposer que $\tilde{P} A \tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & 0 & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & e^{i\theta_1} & & & \\ & & & & & & & e^{-i\theta_1} & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & e^{i\theta_k} \\ & & & & & & & & & & e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}$

Or $\begin{pmatrix} e^{i\theta_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Donc A est unitairement semblable à la matrice B.

Comme A et B sont des matrices à coefficients réels unitairement semblables, elles sont aussi orthogonalement semblables. D'où l'existence d'une matrice $P \in O(n, \mathbb{R})$ tq $PAP^{-1} = B$.

2. <u>SU(2) est difféomorphe à S^3 :</u>

On note $\mathbb{H}$ le corps des quaternions :

$\mathbb{H} = \{ q = (x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)$ avec $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

où la multiplication est $\mathbb{R}$-linéaire et vérifie

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{et} \quad ij = -ji, \; ik = -ki, \; kj = -jk.$$

Alors $\mathbb{H}$ s'identifie à $\mathbb{C}^2$ par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) & \longmapsto & (x_0 + ix_1, \; x_2 - ix_3) \\ z_1 + jz_2 & \longleftarrow & (z_1, z_2) \end{array}$$

⚠ Règle : $\alpha \in \mathbb{C}$, $j\alpha = \bar{\alpha} j$

(car $j(a+ib) = ja + jib = aj - ijb$
$= aj - ibj = (a - ib)j$

Etant donné un élément $u \in \mathbb{H}$, on peut considérer la multiplication à gauche par u : $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $q \mapsto uq$

Alors si u s'écrit $u = \alpha + j\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} uq &= (\alpha + j\beta)(z_1 + jz_2) \\ &= \alpha z_1 + \alpha j z_2 + j\beta z_1 + j\beta j z_2 \\ &= (\alpha z_1 + j^2 \bar{\beta} z_2) + j(\bar{\alpha} z_2 + \beta z_1) \\ &= (\alpha z_1 - \bar{\beta} z_2) + j(\bar{\alpha} z_2 + \beta z_1) \end{aligned}$$

Ainsi, vue comme application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, la multiplication par $u = \alpha + j\beta$ est l'application :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \bar{\beta} z_2 \\ \bar{\alpha} z_2 + \beta z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & +\bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

En particulier si $u = \alpha + j\beta \simeq (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ est de norme 1, i.e $\|u\| = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, la matrice correspondante vérifie :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire est unitaire et de déterminant

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$ Donc elle appartient à $SU(2)$.

Réciproquement, toute matrice de $SU(2)$ s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Ainsi on a une bijection :

$$\begin{aligned} S^3 = \{u \in \mathbb{C}^2, \|u\| = 1\} &\longrightarrow SU(2) \\ u = (\alpha ; \beta) &\longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus c'est un difféomorphisme lorsque l'on munit S^3 de la structure de sous-variété induite par le plongement $S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ et lorsque $SU(2)$ est munit de sa structure de sous-groupe de Lie de $GL(2, \mathbb{C})$.

3. Action Adjointe de $SU(2)$ sur $su(2)$:

L'algèbre de Lie de $su(2)$ est

$$su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix_3 & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -ix_3 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

En effet, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \{S \in M(2, \mathbb{C}), S^* = S\} \\ M &\longmapsto M^* M \end{aligned}$$

est une submersion en tout point $M \in SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$, un antécédent de S par la différentielle $D_M \varphi : X \to M^* X + X^* M$ étant $\frac{1}{2} \sqrt{\det S}\, M S$.

Par conséquent l'espace tangent à $SU(2)$ en la matrice identité s'identifie au noyau de $D_I\varphi$:

$$\operatorname{Ker} D_I\varphi = \{X \in sl(2,\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$
$$= \{X \in M(2,\mathbb{C}),\ \operatorname{Tr} X = 0 \text{ et } X^* = -X\}.$$

L'action Adjointe de $SU(2)$ sur $su(2)$ induit une action linéaire de $SU(2)$ sur $\mathbb{R}^3$ par $\forall g \in SU(2)$

$$\psi(g)\cdot(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \text{ où}$$

$$g\begin{pmatrix} ix_3 & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -ix_3 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} iy_3 & iy_1 - y_2 \\ iy_1 + y_2 & -iy_3 \end{pmatrix}$$

En particulier, $SU(2)$ préserve la norme de $\mathbb{R}^3$ car $\|(y_1, y_2, y_3)\|^2 = \det\begin{pmatrix} iy_3 & iy_1 - y_2 \\ iy_1 + y_2 & -iy_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} ix_3 & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -ix_3 \end{pmatrix}$

Par conséquent, $\forall g \in SU(2)$, $\psi(g) \in O(3,\mathbb{R})$

(si g préserve la norme de $\mathbb{R}^3$, g préserve le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ car $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle\right)$)

Comme $SU(2) \simeq S^3$ est connexe et que $\psi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi(SU(2)) \subset SO(3,\mathbb{R})$

(On peut aussi vérifier par le calcul que la matrice associée à $g = \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix}$ est

$$\psi(g) = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2+d^2 & 2(cd-ab) & 2(ac+bd) \\ 2(ab+cd) & a^2+c^2-b^2-d^2 & 2(bc-ad) \\ -2(ac-bd) & 2(bc+da) & a^2+b^2-c^2-d^2 \end{pmatrix}$$ et appartient à $SO(3)$)

Pour montrer que ψ est un revêtement de $SO(3)$, il suffit de montrer que :

- ψ est un morphisme de groupes (ce qui est vrai par construction)
- $D_I\psi$ est injective de $su(2)$ dans $so(3)$ (car $\dim_{\mathbb{R}} su(2) = \dim_{\mathbb{R}} so(3,\mathbb{R}) = 3$).

On vérifie que $D_I \psi \underbrace{\begin{pmatrix} ic & ia-b \\ ia+b & -ic \end{pmatrix}}^{\in so(3)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= 2 \begin{pmatrix} bx_3 - cx_2 \\ cx_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $D_I \psi \begin{pmatrix} ic & +ia-b \\ ia+b & -ic \end{pmatrix} = 0 \in so(3) \Rightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} ic & ia-b \\ ia+b & -ic \end{pmatrix} = 0 \in su(2).$$

4. <u>SU(2) est un revêtement à 2 feuillets de SO(3)</u>:

Calculons le noyau de ψ :

$$\mathrm{Ker}\,\psi = \left\{ g \in SU(2) \text{ tel que } g \begin{pmatrix} ix_3 & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -ix_3 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} ix_3 & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -ix_3 \end{pmatrix} \quad \forall\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Soit $g \in \mathrm{Ker}\,\psi$, alors g commute à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ donc g est diagonale. Comme g commute aussi à $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, les coefficients diagonaux sont égaux. Comme $g \in SU(2)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, on en déduit que

$g \in \{\pm Id\}$.

<u>Conclusion</u>: $\psi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ est le revêtement universel de $SO(3)$ (car $SU(2)$ est simplement connexe) et $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Ker}\,\psi$.

B) <u>$SL(2, \mathbb{C})$ est le revêtement universel de $SO(3, \mathbb{C})$</u> :

On peut montrer que : (cf exo 4 feuille de TD n° 6)

1) $SO(3, \mathbb{C})$ est connexe et $\pi_1(SO(3, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2) $SL(2, \mathbb{C})$ est connexe est simplement connexe
3) L'action Adjointe de $SL(2, \mathbb{C})$ sur son algèbre de Lie défini un revêtement de $SL(2, \mathbb{C})$ au-dessus de $SO(3, \mathbb{C})$.

Thm: Soit G un groupe de Lie connexe et $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ son revêtement universel. Soit $\tilde{e} \in \tilde{G}$ tel que $p(\tilde{e}) = e_G$. Alors $\tilde{G}$ admet une unique structure de groupe de Lie d'élément neutre $\tilde{e}$ telle que p soit un morphisme de groupes de Lie.

Dem: Comme $\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}) = \pi_1(\tilde{G}) \times \pi_1(\tilde{G}) = \{e\} \times \{e\} = \{e\}$, $\tilde{G} \times \tilde{G}$ est simplement connexe. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} m \circ (p,p) : \tilde{G} \times \tilde{G} & \longrightarrow & G \\ (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) & \longmapsto & p(\tilde{g}_1) \cdot p(\tilde{g}_2) \end{array}$$

multiplication de G

se relève en une unique application $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}$.
On vérifie alors que $\tilde{m}$ est associative d'élément neutre $\tilde{e}$ et que l'inversion de $(\tilde{G}, \tilde{m})$ est le relèvement de $inv \circ p$ où $inv : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$.

L'unicité provient de l'unicité du relèvement.

3. Correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie simplement connexe

Thm d'Ado: ~ 1935
Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est isomorphe à une sous-algèbre de $M(n, \mathbb{R})$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

Dem: cf I.D. Ado The representation of Lie algebras by matrices Transl. A. Math. Soc. (1) 9 (1962) p 308-327.

Corollaire:
Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe.

Dem du corollaire :

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie réelle de dim finie.
D'après le thm d'Ado, il existe un morphisme d'algèbre de Lie $\tau : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$.
Alors $H = \langle \exp \tau(\mathfrak{h}) \rangle$ (le sous-groupe engendré par $\exp \tau(\mathfrak{h})$) admet une structure de groupe de Lie telle que l'inclusion $H \hookrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ soit une immersion telle que $\mathrm{Lie}(H) \simeq \tau(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{h}$.

Thm:

Pour toute algèbre de Lie réelle de dimension finie $\mathfrak{g}$ il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe tel que $\mathrm{Lie}(\tilde{G}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$. De plus, $\tilde{G}$ est unique à isomorphisme unique près.

Dem: On prend G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et on pose $\tilde{G}$ = le revêtement universel de G. L'unicité provient du thm suivant:

Thm:

Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, et H un groupe de Lie connexe.
Alors pour tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ il existe un unique morphisme de groupes de Lie $\varphi : G \longrightarrow H$ tel que $D_{e_G}\varphi = f$.

Dem:

Comme G est connexe, $\forall g \in G$, g s'écrit $g = \exp_G X_1 \ldots \exp_G X_n$ pour des $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.
On voudrait définir $\varphi(g)$ par $\varphi(g) = \varphi(\exp_G X_1) \ldots \varphi(\exp_G X_n)$
$= \exp_H(f(X_1)) \ldots \exp_H(f(X_n))$

Le théorème affirme que le produit de droite ne dépend pas du choix de $X_1, \dots, X_n$ lorsque G est simplement connexe, et définit un morphisme de groupes.

- <u>unicité</u>: Comme G est connexe, deux morphismes de gr φ_1 et φ_2 tels que $D_{e_G}\varphi_1 = D_{e_G}\varphi_2 = f$ coïncident.
- <u>existence</u>: On considère le graphe de f :

$\text{graphe}(f) = \{(X, f(X)) \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}\}$

où $\mathfrak{g} = \text{Lie}\, G$ et $\mathfrak{h} = \text{Lie}\, H$.

Comme f est un morphisme d'algèbres de Lie, graphe(f) est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned}[(X_1, f(X_1)) ; (X_2, f(X_2))] &\overset{\text{def}}{=} \left([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [f(X_1), f(X_2)]_{\mathfrak{h}}\right) \\ &= \left([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, f([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}})\right) \\ &\in \text{graphe}(f).\end{aligned}$$

Notons Γ le sous-groupe connexe de $G \times H$ engendré par graphe(f), et munissons le de l'unique structure de groupe de Lie telle que $\Gamma \overset{i}{\hookrightarrow} G \times H$ soit une immersion tq $\text{Lie}(\Gamma) \xrightarrow[Di]{\sim} \text{graphe}\, f$ soit un isomorphisme. Alors l'application composé $p = i \circ pr_1$, où $pr_1 : G \times H \longrightarrow G$ est la projection canonique sur le premier facteur, induit un isomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\begin{tikzcd} Dp : \text{Lie}\,\Gamma \arrow[r, "Di"'] & \text{graphe}\, f \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\sim", "Dpr_1"'] & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \arrow[d, "Dpr_1"] \\ & & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

Donc p est un revêtement de variétés. Or G est simplement connexe, donc n'admet pas de revêtement non trivial. Ainsi p est un isomorphisme de groupes de Lie. Alors on obtient un relèvement de $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ comme composition : $\varphi : G \xrightarrow{p^{-1}} \Gamma \overset{i}{\hookrightarrow} G \times H \xrightarrow{pr_2} H$

On a bien : $D_{e_G}\varphi = Dpr_2 \circ Di \circ Dp^{-1} : X \in \mathfrak{g} \to f(X) \in \mathfrak{h}$.

<u>Résumé</u> : Les résultats suivants sont connus sous le nom de théorèmes de Lie (bien que certains soient plutôt dus à Cartan...)

1) Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si H est un sous-groupe de Lie de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, il existe un unique sous-groupe connexe H de G qui soit un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

2) Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$. Si $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$, alors G_1 et G_2 sont localement isomorphes. Si de plus G_1 et G_2 sont simplement connexes, alors G_1 et G_2 sont isomorphes.

3) Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie (non néc. unique).

<u>Rque</u> : Dans 1), les idéaux de $\mathfrak{g}$ correspondent aux sous-groupes distingués de G.