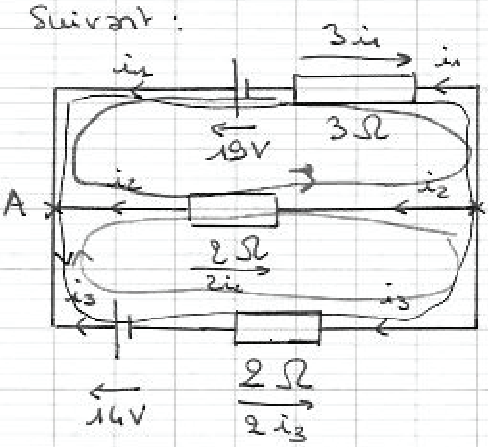
II. Systèmes linéaires

0 ~~Exemples concrets~~ Introduction

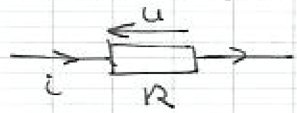
Exemple 1 : On considère le circuit électrique suivant :



On rappelle - la loi des noeuds : la somme (algébrique) des courants entrant en un noeud est nulle ; en A : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

- la loi des mailles : la somme (algébrique) des tensions le long d'une boucle du circuit est nulle.

- loi d'Ohm : $U = Ri$ aux bornes d'une résistance avec comme convention :



Boucle 1 : $19 + 2i_2 - 3i_1 = 0$

Boucle 2 : $14 + 2i_2 - 2i_3 = 0$

Boucle 3 : $19 - 14 + 2i_3 - 3i_1 = 0$

Que valent i_1, i_2, i_3 ? On a le système suivant de 4 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_1 - 2i_2 = 19 \\ -2i_2 + 2i_3 = 14 \\ 3i_1 - 2i_3 = 5 \end{cases}$$

fin 2e cours 2005

Exemple 2 : Une entreprise fabrique des manteaux, composés de tissu rouge, de tissu bleu et d'une doublure. Le tableau suivant résume la quantité en m^2 de chaque tissu nécessaire pour la confection d'un manteau de taille S, M, L et XL :

taille	S	M	L	XL
Rouge	0,4	0,5	0,6	0,7
Bleu	1	1,1	1,2	1,3
Doublure	1,5	1,7	1,9	2,1

Pour confectionner a manteaux taille S
b ——— M
c ——— L
d ——— XL

On a besoin de :

$a\,0{,}4 + b\,0{,}5 + c\,0{,}6 + d\,0{,}7 = R$ tissu rouge
$a\,1 + b\,1{,}1 + c\,1{,}2 + d\,1{,}3 = B$ tissu bleu
$a\,1{,}5 + b\,1{,}7 + c\,1{,}9 + d\,2{,}1 = D$ doublure

L'entreprise a $10\ m^2$ de tissu rouge, $15\ m^2$ de tissu bleu et $20\ m^2$ de doublure en stock.
Combien peut-elle fabriquer de manteaux S, M, L et XL ? Il nous faut résoudre le système de 3 équations à 4 inconnues :

en écoulant tout son tissu

$$\begin{cases} a\,0{,}4 + b\,0{,}5 + c\,0{,}6 + d\,0{,}7 = 10 \\ a\,1 + b\,1{,}1 + c\,1{,}2 + d\,1{,}3 = 15 \\ a\,1{,}5 + b\,1{,}7 + c\,1{,}9 + d\,2{,}1 = 20 \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \geq 0$.

1. Position du problème mathématique

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf : Soient $p \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers.
On appelle système linéaire à p équations et n inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ un système d'équations de la forme

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \dots + a_{pn} x_n = b_p \end{array} \right.$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $b_k \in \mathbb{K}$.
Les éléments a_{ij}, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$ sont appelés les coefficients du système (S) et les éléments b_k, $1 \leq k \leq p$, les seconds membres de (S).
Si $b_1 = \dots = b_p = 0$, on dit que le système est homogène.
Les éléments $x_1, \dots, x_n$ sont les inconnues du système. Un n-uplet $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ est solution du système (S) si $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ satisfont les p équations de (S).
Résoudre (S) c'est trouver l'ensemble des solutions (c'est-à-dire toutes les solutions).
On dit que le système est compatible s'il admet au moins une solution. Sinon il est dit incompatible ou impossible.

Comment reconnaître si un système d'équations est linéaire ?

D'abord, un système d'équations est linéaire si chacune des équations qui le compose est linéaire. Une équation est linéaire en $x_1, \dots, x_n$ si elle est de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ où les a_i et b sont INDÉPENDANTS de x_i (mais peuvent dépendre de paramètres du problème).

<u>Ex 1</u>: L'équation d'inconnues x_1, x_2 et x_3 et de paramètre réel $t \neq 0$ suivante est linéaire : $e^t x_1 + \ln(t) x_2 + \frac{1}{t} x_3 = 2t$.

<u>Ex 2</u>: L'équation $x_1 x_2 = 3$ n'est pas linéaire

— " — $x_1^2 + \frac{1}{x_2} + x_3 = 2$ — " —

<u>Notation</u>: Lorsque p et n sont grands, on préfère noter le système (S) sous forme de tableau :

$$(S) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right) \text{ ou } \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{B}$$

On appelle cela la "notation matricielle".

<u>Déf</u>: Soient $p \geq 1$ et $n \geq$ deux entiers. Une matrice d'ordre (p, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire à p lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$.

On note : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$

1^e indice $= i$ = indice de ligne
2^e indice $= j$ = indice de colonne

Déf : Etant donné un système linéaire (S) de p équations à n inconnues, on appelle matrice (des coefficients) du système la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ et matrice augmentée la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

Exemple 1 : Dans l'exemple du circuit électrique la matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 19 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$

Exemple 2 : Dans l'exemple des manteaux, la matrice du système est

$$B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 1 & 1,1 & 1,2 & 1,3 \\ 1,5 & 1,7 & 1,9 & 2,1 \end{pmatrix}$$

et la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{cccc|c} 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 10 \\ 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 15 \\ 1,5 & 1,7 & 1,9 & 2,1 & 20 \end{array}\right)$.

Problème : Résoudre un système linéaire (S) lorsque p et n sont grands.

2. Résolution dans le cas d'un système linéaire échelonné.

<u>Déf</u>: Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ est dite échelonnée ou en échelons s'il existe un entier r avec $1 \leq r \leq \min(p, n)$ tel que

1) $a_{ii} \neq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, r\}$
2) $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \in \{r+1, \dots, p\}$ et $\forall\, j \in \{1, \dots, n\}$
3) $a_{ij} = 0$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, i\}$

<u>Ex</u>: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée, $r = 2$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée, $r = 3$

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ échelonnée, $r = 1$

$\Rightarrow$ A est de la forme
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\ 0 & a_{rr} & \dots\ a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots\ 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Déf</u>: Pour une matrice A échelonnée comme précédemment, on appelle r le <u>rang de la matrice</u>.

<u>Déf</u>: Un <u>système</u> de p équations à n inconnues est dit échelonné si la matrice de ses coefficients est en échelons.

<u>Déf</u>: Un système échelonné est dit de rang r si la matrice de ses coefficients est de rang r. Les inconnues $x_1, \dots, x_r$ sont appelées <u>inconnues</u>

principales et $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ sont appelées les inconnues secondaires. Les r premières équations sont appelées équations principales. Les coefficients $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, ..., $a_{rr} \neq 0$ sont appelés les pivots du système.

RÉSOLUTION :

1e cas : $r = p = n$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

On dit que le système est "de Cramer".

Prop : Un système de Cramer (c'est-à-dire un système linéaire dont la matrice des coefficients est de Cramer) admet une solution unique (en particulier il est compatible pour tout second membre).

Dem : Le système s'écrit

$$(S) : \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \qquad a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

On calcule successivement :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (\text{possible car } a_{nn} \neq 0)$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \left(b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n \right) \quad (\text{possible car } a_{n-1,n-1} \neq 0)$$

. . . .

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \right) \quad (\text{possible car } a_{11} \neq 0)$$

2^e cas : $r = p < n$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & - & - & - & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pp} & a_{pp+1} \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$

Prop: Un système échelonné de p équations à $n > p$ inconnues de rang $r = p$ admet une infinité de solutions. L'ensemble de solutions est paramétré par $n - r$ paramètres.

Dem: Le système s'écrit :

$$(S) = \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \\ \quad\quad a_{pp} x_p + \dots + a_{pn} x_n = b_p \end{cases}$$

(avec $r = p$)

Inconnues principales : $x_1, \dots, x_p$

Inconnues secondaires : $x_{p+1}, \dots, x_n$

Toutes les équations sont principales.

On donne aux inconnues secondaires le rôle de paramètres : pour cela on pose

$$x_{p+1} = \lambda_1 \in \mathbb{K}$$
$$x_{p+2} = \lambda_2 \in \mathbb{K}$$
$$\cdots$$
$$x_n = \lambda_{n-p} \in \mathbb{K}$$

Puis on résout le système de Cramer en $x_1, \dots, x_p$ obtenu après avoir fait passer les paramètres au second membre.

$\Rightarrow$ quelque soient $b_1, \dots, b_p$, on obtient un ensemble de solution paramétré par $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}$.

<u>Ex :</u> $S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1 \\ x_2 - x_4 = b_2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad r = 2 = p < n = 4$$

Inconnues principales x_1, x_2

Inconnues secondaires x_3, x_4

On pose $x_3 = \lambda_1 \in \mathbb{K}$ et $x_4 = \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Alors S devient : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 + \lambda_1 \\ x_2 = b_2 + \lambda_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 + \lambda_1 - 2(b_2 + \lambda_2) \\ x_2 = b_2 + \lambda_2 \end{cases}$$

La solution générale du système (S) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + \lambda_1 - 2b_2 - 2\lambda_2 \\ b_2 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{= \begin{pmatrix} b_1 - 2b_2 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}}_{\text{équation paramétrique de l'ensemble des solutions.}}$$

<u>3e cas :</u> $r = n < p$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Prop: Un système échelonné à p équations à $n < p$ inconnues de rang $r = n$ est compatible si et seulement si les $p-r$ conditions de compatibilité suivantes

$$b_{r+1} = 0$$
$$b_{r+2} = 0$$
$$\dots$$
$$b_p = 0$$

le système admet une solution unique

sont vérifiées. Dans ce cas, on oublie les lignes nulles et on résout le système de Cramer en $x_1, \dots, x_n$: on obtient une solution unique.

Dem. Si les conditions de compatibilité ne sont pas vérifiées il n'y a pas de solution au système et on a des équ. impossibles. Si les conditions de compatibilité sont vérifiées

Ex :

$$(S) : \begin{cases} x_1 - x_2 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ 0 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

(S) admet une solution ssi $b_3 = 0$ et $b_4 = 0$.
Dans ce cas, (S) admet une solution unique

$$x_1 = b_1 + b_2$$
$$x_2 = b_2.$$

4e cas : $r < p$ et $r < n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{rr} \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Prop: Un système linéaire échelonné de p équations à n inconnues de rang $r < p$, $r < n$ admet des solutions ssi les $p-r$ conditions de compatibilité

$$b_{r+1} = 0$$
$$\dots$$
$$b_p = 0$$

sont satisfaites. Dans ce cas, le système admet une infinité de solutions paramétrée par $n-r$ paramètres.

Dem: le système s'écrit

$$(S) : \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad \ddots \\ \qquad a_{rr} x_r + \dots + a_{rn} x_n = b_r \\ \qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad 0 = b_p \end{cases}$$

Si les conditions $b_{r+1} = 0, \dots, b_p = 0$ ne sont pas vérifiées, le système est impossible. Sinon, on oublie les lignes nulles et on se retrouve dans le cas 2.

3. Cas général : Méthode du Pivot de Gauss

Déf : Deux systèmes (S) et (S') sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Déf : Soit (S) un système linéaire de p équations à n inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle opération élémentaire sur (S) ~~ou sur les lignes de la matrice augmentée de (S)~~ l'une des opérations suivantes :

1) Permuter 2 lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
2) Multiplier une ligne par un scalaire non nul $L_i \leftarrow a L_i \quad (a \neq 0)$
3) Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes
$$L_i \leftarrow L_i + a L_j \quad j \neq i.$$

Thm : Appliquer une opération élémentaire sur un système (S) le transforme en un système équivalent.

Dem : on peut revenir en arrière, en effectuant
pour
1) $L_i \leftrightarrow L_j$
2) $L_i \leftarrow \frac{1}{a} L_i$
3) $L_i \leftarrow L_i - a L_j \quad j \neq i$

⚠ Si on applique deux opérations de type 3) au système EN MÊME TEMPS, on peut obtenir des systèmes non équivalents.

Ex: $\begin{cases} x_1 \quad = 1 \\ 2x_1 \quad = 2 \end{cases}$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} 0 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$

Thm: Les opérations simultanées suivantes sont autorisées :

$L_1 \leftarrow L_1$

$L_2 \leftarrow L_2 + c_2 L_1$

$\dots$

$L_p \leftarrow L_p + c_p L_1$

Elles transforment le système en un système équivalent.

Dem: On peut revenir en arrière en effectuant

$L_1 \leftarrow L_1$

$L_2 \leftarrow L_2 - c_2 L_1$

$\dots$

$L_p \leftarrow L_p - c_p L_1$

car L_1 a été conservé.

TECHNIQUE 1: Pour résoudre un système linéaire général (S) de p équations à n inconnues, on effectue des opérations élémentaires sur (S) pour se ramener à un système équivalent en échelons. Puis on résout ce dernier comme dans le paragraphe précédent. La méthode du pivot de Gauss est un algorithme pour se ramener à un système échelonné. La méthode consiste à:

(a) Se ramener au cas $a_{11} \neq 0$ quitte à échange l'ordre de équations ou des inconnues

(b) Eliminer l'inconnue x_1 dans toutes les équations sauf la première en appliquant les opérations simultanées autorisées suivantes:

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \qquad \text{(on fait apparaître des zéros sous } a_{11} x_1\text{)}$$
$$\cdots$$
$$L_p \leftarrow L_p - \frac{a_{p1}}{a_{11}} L_1$$

On obtient un système linéaire équivalent de la forme :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ c_{22} x_2 + \dots + c_{2n} x_n &= b_2' \\ &\vdots \\ c_{p2} x_2 + \dots + c_{pn} x_n &= b_p' \end{aligned}$$

(c) Si les c_{ij} ne sont pas tous nuls, on peut se ramener à $c_{22} \neq 0$ quitte à changer l'ordre des équations ou des inconnues. On applique alors les opérations simultanées suivantes

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c_{32}}{c_{22}} L_2 \qquad \text{(on fait apparaître des zéros sous } c_{22} x_2\text{)}$$
$$\cdots$$
$$L_p \leftarrow L_p - \frac{c_{p2}}{c_{22}} L_2$$

Et ainsi de suite jusqu'à obtenir un système en échelons qu'on résout comme ds le paragraphe 2.

4. Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

a. sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$

Déf : Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}^m, +)$ stable par homothéties.
De façon équivalente, un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^m$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ s'il est non-vide et si, pour tous $\vec{v}$, $\vec{w}$ de P et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{v} + \lambda \vec{w} \in P.$$

Exemples :

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et toutes les droites du plan passant par l'origine.

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$ toutes les droites et les plans de l'espace $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine.

b. familles libres, familles génératrices, bases

Dans toute la suite, P désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$

Déf : Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de un ~~sous-espace~~ vectoriel P ~~de $\mathbb{R}^m$~~. On dit que la famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est libre ou que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont linéairement indépendants si la relation $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.
Dans le cas contraire, on dit que la famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est liée ou que les vecteurs sont linéairement dépendants.

Déf : On dit que $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ s'il s'écrit $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Rque : La famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est libre ssi il n'y a qu'une seule manière d'écrire $\vec{0}$ comme comb. lin de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ (c.à.d avec tous les coefficients égaux à 0)

Cas particuliers :
- Cas $k=1$: $\vec{v}$ est linéairement indépendant $\Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$
- Cas $k=2$: $\vec{v}, \vec{w}$ linéairement indépendants
$\Leftrightarrow \vec{v}, \vec{w}$ non-colinéaires (c-à-d non-proportionnels)

Proposition : Soit $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs de P. Cette famille est libre si et seulement si aucun vecteur $\vec{v_i}$, $1 \leq i \leq k$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Dem : ($\Rightarrow$) Par l'absurde : supposons que la famille $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ soit libre mais que $\vec{v_i}$ soit combinaison linéaire des autres vecteurs :
$$\vec{v_i} = \alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_{i-1} \vec{v_{i-1}} + \alpha_{i+1} \vec{v_{i+1}} + \dots + \alpha_k \vec{v_k}$$
Alors le vecteur nul s'écrit
$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_{i-1} \vec{v_{i-1}} - \vec{v_i} + \alpha_{i+1} \vec{v_{i+1}} + \dots + \alpha_k \vec{v_k}$$
On a obtenu une écriture de $\vec{0}$ comme comb. lin de $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ avec des coefficients non tous nuls ($\lambda_i = -1$)
Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ est libre.
($\Leftarrow$) Par l'absurde : supposons qu'aucun vecteur $\vec{v_i}$, $1 \leq i \leq k$ ne soit comb. lin des autres vecteurs mais que $\vec{0}$ admette une écriture de la forme
$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_k \vec{v_k}$$
avec au moins un coeff λ_i non nul. Alors
$$\vec{v_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \left(\lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_{i-1} \vec{v_{i-1}} + \lambda_{i+1} \vec{v_{i+1}} + \dots + \lambda_k \vec{v_k} \right)$$
On a obtenu $\vec{v_i}$ comme comb. lin des autres vecteurs : contradiction.

Comment savoir si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ?

<u>Ex</u> : $n=3$ soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Considérons la relation :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

en coordonnées :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

on obtient le système d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Si la seule solution du système est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ alors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont linéairement indépendants.

<u>Théorème</u> : Une famille de $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est nécessairement liée.

<u>Dem</u> : Par récurrence sur n :

- Initialisation : $n=1$

Deux vecteurs de $\mathbb{R}$ sont nécessairement colinéaires.

- Hypothèse de récurrence : supposons que l'on ait montré que $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont nécessairement liés. Considérons $(n+2)$ vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n+1,1}\end{pmatrix}, \dots, \vec{v}_{n+2} = \begin{pmatrix}a_{1,n+2}\\\vdots\\a_{n+1,n+2}\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Leurs coordonnées nous donne une matrice à $(n+2)$ colonnes et $(n+1)$ lignes :

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_{m+1} & \vec{v}_{m+2} \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1^e \text{ coord} \\ 2^e \text{ coord} \\ \vdots \\ (m+1)^{\text{ème}} \text{ coord} \end{matrix}
\end{array}$$

- Si tous les coefficients de la première ligne sont nuls on peut oublier la première ligne et on est ramené au cas de $m+2$ vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Par hypothèse de récurrence, ils sont nécessairement liés.
- Sinon, quitte à changer l'ordre des vecteurs, on peut supposer $a_{11} \neq 0$. On applique la méthode du pivot de Gauss sur les COLONNES afin de faire apparaître des 0 sur la 1^e ligne : On obtient :

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_{m+1} - \frac{a_{1,m+1}}{a_{11}}\vec{v}_1 & \vec{v}_{m+2} - \frac{a_{1,m+2}}{a_{11}}\vec{v}_1 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{22} & b_{2,m+1} & b_{2,m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1} & b_{m+1,2} & b_{m+1,m+1} & b_{m+1,m+2} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe des coefficients $\lambda_2, \dots, \lambda_{m+2}$ non tous nuls (c.à.d au moins un des coeff est non nul) tels que

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} b_{22} \\ \vdots \\ b_{m+1,2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{m+1} \begin{pmatrix} b_{2,m+1} \\ \vdots \\ b_{m+1,m+1} \end{pmatrix} + \lambda_{m+2} \begin{pmatrix} b_{2,m+2} \\ \vdots \\ b_{m+1,m+2} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Alors $\vec{0} = \lambda_2 \left(\vec{v}_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\vec{v}_1\right) + \dots + \lambda_{m+1}\left(\vec{v}_{m+1} - \frac{a_{1,m+1}}{a_{11}}\vec{v}_1\right) + \lambda_{m+2}\left(\vec{v}_{m+2} - \frac{a_{1,m+2}}{a_{11}}\vec{v}_1\right)$

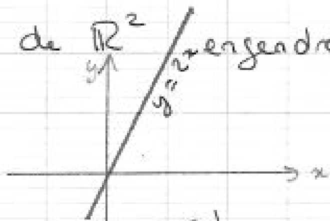
$\Leftrightarrow \vec{0} = \frac{-\vec{v_1}}{a_{11}}\left(\lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_{m+2} a_{1\,m+2}\right) + \lambda_2 \vec{v_2} + \dots + \lambda_{m+2} \vec{v}_{m+2}$

Comme au moins un des λ_i est non nul, on a obtenu une écriture du vecteur nul $\vec{0}$ comme comb. lin des $\vec{v_1}, \dots, \vec{v}_{m+2}$ où au moins un des coeff est non nul : la famille $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v}_{m+2}\}$ est liée.

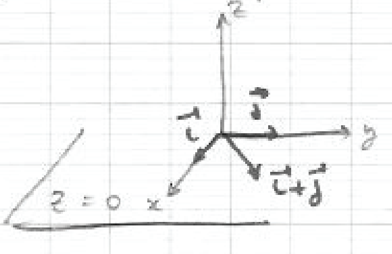
<u>Déf</u> : Soit P un sev de $\mathbb{R}^m$ et $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ des vecteurs de P. On dit que la famille $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ de P est une famille génératrice de P ou engendre P si tout vecteur de P est une combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$.

<u>Exemple</u> :

- le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ engendre la droite d'équation $y = 2x$



- Les vecteurs $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{i} + \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendrent le plan d'équation $z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$



<u>Déf</u> : Soit P un sev de $\mathbb{R}^m$ et $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ des vecteurs de P. On dit que la famille $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ est une <u>base</u> de P si 1) $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ est libre

2) $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ engendre P.

<u>Prop:</u> $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est une base de P si et seulement si tout vecteur de P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.

<u>Dem:</u> ($\Rightarrow$) Soit $\vec{v}$ un vecteur de P. Comme $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ engendre P, $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$: il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

Supposons qu'il existe une autre manière d'écrire $\vec{v}$ comme comb. lin des $\vec{v}_k$

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$

Alors $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} = (\alpha_1 - \lambda_1)\vec{v}_1 + \dots + (\alpha_k - \lambda_k)\vec{v}_k$

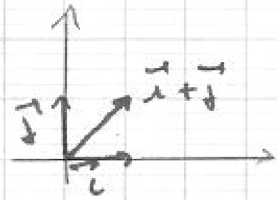
Comme la famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est libre, cela implique $\lambda_1 = \alpha_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k$. Donc l'écriture est unique.

($\Leftarrow$) Si tout vecteur de P est comb. lin de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ alors la famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ engendre P.
Si l'écriture est unique, $\vec{0}$ s'écrit de façon unique comme comb. lin des $\vec{v}_i$ et

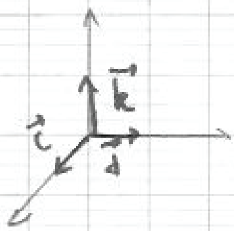
$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k \rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

<u>Exemples fondamentaux de bases:</u>

- $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$
  $\{\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}\}$ " "



- $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$



- Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ possède une "base canonique" formée des vecteurs

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \dots ; \ \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \ n \text{ coordonnées}$$

En effet, tout vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme :

$$\vec{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}$$

<u>Prop</u> : Tout sous-espace vectoriel $P \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.

<u>Dem</u> : On considère les familles libres de vecteurs de P. Comme $P \neq \{0\}$, tout vecteur non nul de P constitue une famille libre de P. Comme toute famille de $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée, le nombre de vecteurs d'une famille libre est inférieur ou égal à n. Prenons une famille libre maximale,
$\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ c'est-à-dire qui contient le plus grand nombre de vecteurs. Montrons qu'elle engendre P. Soit $\vec{v} \in P$. Comme $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ est libre maximale, la famille $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}, \vec{v}\}$ est liée. Donc il existe des coefficients $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda \in \mathbb{R}}_{\text{non tous nuls}}$ tels que

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_p \vec{v_p} + \lambda \vec{v}.$$

Si λ était nul, on aurait une écriture du vecteur nul comme comb. lin des $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ avec des coeff $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, ce qui contredit le fait que $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ est libre.

Donc $\lambda \neq 0$ et $\vec{v} = -\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_p \vec{v_p})$

Ainsi $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ est libre et engendre P : c'est une base de P.

<u>Thm de la dimension:</u> Toutes les bases de P ont le même nombre de vecteurs.

Par l'absurde:

<u>Dem:</u> Soient $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ et $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ deux bases d'un même sous-espace vectoriel P de $\mathbb{R}^n$. Supposons $k > p$. Comme $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ engendre P, chaque $\vec{v}_i$ est comb lin des $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$. Notons en colonne les coordonnées de $\vec{v}_i$ dans la base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$.

$$\vec{v}_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{pi} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_p \end{array} \end{array} = a_{1i}\,\vec{e}_1 + a_{2i}\,\vec{e}_2 + \dots + a_{pi}\,\vec{e}_p$$

On obtient une matrice à k colonnes (une pour chaque vecteur v_i, $1 \leq i \leq k$) et p lignes (une pour chaque vecteur $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$):

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & & \vec{v}_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pk} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_p \end{array} \end{array}$$

Comme $k > p$, il y a au moins $(p+1)$ colonnes. (et p lignes). Ainsi les $(p+1)$ premières colonnes sont nécessairement liées : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{p+1} \begin{pmatrix} a_{1\,p+1} \\ \vdots \\ a_{p\,p+1} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Mais alors $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_{p+1} \vec{v}_{p+1} = \vec{0}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls. Ceci contredit le fait que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ est une famille libre. Ainsi $k \leq p$.

En échangeant les rôles de $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ et $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ on obtient $k = p$.

Déf: On appelle dimension de P le nombre d'éléments d'une base de P.

c. Applications linéaires:

Déf: On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire si $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\vec{v} + \lambda \vec{w}) = f(\vec{v}) + \lambda f(\vec{w}).$$

Propriété: Si f est linéaire, nécessairement $f(\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{0}}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^p$.

Ex: - l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x+y$ est linéaire

- l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(x,y) = (x+y,\ y-x,\ y)$ est linéaire.

Déf: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. On appelle matrice de f la matrice de taille (p,n) dont les colonnes sont les images de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_p' \end{array}
\end{array}$$

avec $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ n lignes ...

$\{e_1', \dots, e_p'\}$ " $\mathbb{R}^p$: $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ p lignes

<u>Ex:</u> La matrice de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x + y$ est

$$\begin{array}{cc} f\binom{1}{0} & f\binom{0}{1} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(x, y) = (x+y, y-x, y)$ est

$$\begin{array}{cc} g\binom{1}{0} & g\binom{0}{1} \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Def:</u> Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. On appelle image de f l'ensemble

$$\mathrm{Im} f = \{ f(\vec{v}) \in \mathbb{R}^p, \ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^p$$

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker} f = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \ f(\vec{v}) = \vec{0} \} \subset \mathbb{R}^n$$

<u>Prop:</u> L'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
Le noyau de f " " $\mathbb{R}^n$.

<u>Dem:</u> exercice (cf chap 1)

<u>Def:</u> On appelle rang de f la dimension de l'image de f.

<u>Théorème du rang:</u> Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors

$$\underbrace{n}_{\text{dimension de l'espace de départ}} = \underbrace{\dim \mathrm{Im} f}_{\text{dimension de l'image}} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker} f}_{\text{dimension du noyau.}}$$

Dem: Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ une base du noyau de f et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ une base de l'image de f.
Pour chaque $\vec{v}_i$, $1 \leq i \leq r$, choisissons un antécédent $\vec{u}_i'$, $1 \leq i \leq r$: $f(\vec{u}_i') = \vec{v}_i$.
Montrons que $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_1', \dots, \vec{u}_r'\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de la dimension, cela impliquera $k + r = n$.

1) Montrons que $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_1', \dots, \vec{u}_r'\}$ engendre $\mathbb{R}^n$.
Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Comme $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ engendre $\mathrm{Im} f$, $f(\vec{u})$ est comb. lin de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$:

$$f(\vec{u}) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_r \vec{v}_r$$

Alors $\vec{u} - \lambda_1 \vec{u}_1' - \dots - \lambda_r \vec{u}_r'$ appartient au noyau de f. En effet

$$\begin{aligned} f(\vec{u} - \lambda_1 \vec{u}_1' - \dots - \lambda_r \vec{u}_r') &= f(\vec{u}) - \lambda_1 f(\vec{u}_1') - \dots - \lambda_r f(\vec{u}_r') \\ &= f(\vec{u}) - \lambda_1 \vec{v}_1 - \dots - \lambda_r \vec{v}_r \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Comme $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de $\mathrm{Ker} f$, on a

$$\vec{u} - \lambda_1 \vec{u}_1' - \dots - \lambda_r \vec{u}_r' = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$$

Ainsi: $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1' + \dots + \lambda_r \vec{u}_r' + \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$.

2) Montrons que $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_1', \dots, \vec{u}_r'\}$ est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_1', \dots, \lambda_r' \in \mathbb{R}$ tels que

$$(*) \quad \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k + \lambda_1' \vec{u}_1' + \dots + \lambda_r' \vec{u}_r' = \vec{0}$$

Appliquons f :

$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k + \lambda_1' \vec{u}_1' + \dots + \lambda_r' \vec{u}_r') = f(\vec{0})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1' \vec{v}_1 + \dots \lambda_r' \vec{v}_r = \vec{0}$$

Comme $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ est libre, cela implique

$$\lambda_1' = \dots = \lambda_r' = 0$$

Alors la relation $(*)$ devient

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

Comme $\{u_1, \dots, u_k\}$ est libre, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

d. Retour aux systèmes linéaires :

On a déjà vu qu'un système linéaire

$$(S) = \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + \dots + a_{pn} x_n = b_p \end{cases}$$

avait pour écriture matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{b}$$

Interprétation : A est la matrice de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associant au vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \in \mathbb{R}^n$ le vecteur image

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + \dots + a_{pn} x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

En effet, si on appelle $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, avec $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}}$ place,

on a $f(e_i) = f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{pi} \end{pmatrix} = i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Ainsi résoudre le système linéaire (S) c'est chercher un antécédent de $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ par l'application f : on cherche $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(X) = b$.

Thm : le système (S) est compatible si et seulement si b appartient à l'image de f, et dans ce cas toute solution est somme d'une solution particulière et d'un élément de $\mathrm{Ker} f$.

Dem :

Si b n'appartient pas à $\mathrm{Im} f$, b n'admet pas d'antécédent et l'équation $f(X) = b$ n'a pas de solution. Réciproquement, dire que $f(X) = b$ admet une solution X, c'est dire que b appartient à l'image de f.

Lorsque $b \in \mathrm{Im} f$, deux solutions X_1 et X_2 de $f(X) = b$ diffèrent d'un élément du noyau $\mathrm{Ker} f$. En effet

$$f(X_1 - X_2) = f(X_1) - f(X_2) = b - b = \vec{0}$$

$$\Rightarrow X_1 - X_2 = \vec{u} \in \mathrm{Ker} f.$$

Ainsi toute solution de (S) s'écrit sous la forme

$$X_2 = X_1 - \vec{u}$$

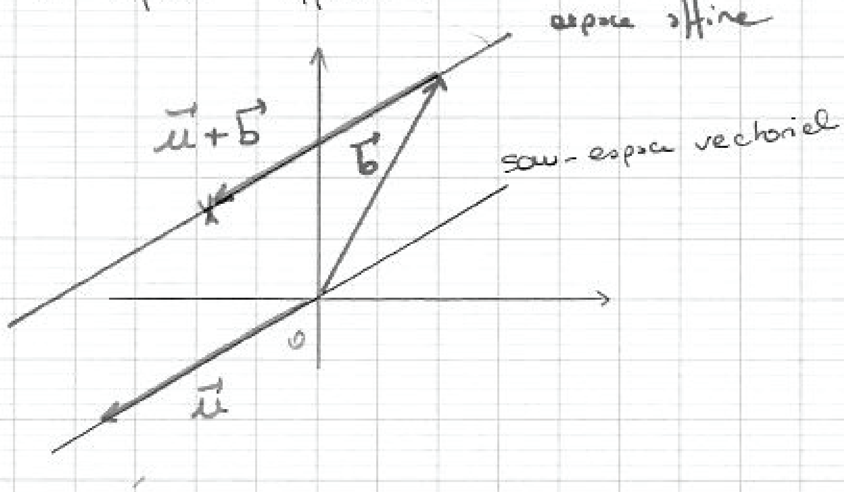
avec X_1 une solution particulière de $f(X) = b$ et $\vec{u} \in \mathrm{Ker} f$.

Rque 1 : Les éléments du noyau $\mathrm{Ker} f$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont solutions du système homogène associé

$$(S') : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + \dots + a_{pn} x_n = 0 \end{cases}$$

(on a remplacé le second membre de (S) par des 0).

Rque 2: Dans les équations différentielles ordinaires (EDO) on retrouve ce phénomène où la solution générale d'une équation = une solution particulière + une solution de l'équation homogène associée. La structure mathématique sous-jacente est celle d'espace affine :



d. Calcul de base de Im f et Ker f

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et A sa matrice dans les bases canoniques $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_p{}'\}$ de $\mathbb{R}^p$.

On rappelle que l'image d'une combinaison linéaire $\lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{e}_n$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire des colonnes de la matrice identité de $\mathbb{R}^n$) est la combinaison linéaire

$$\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$$

des colonnes de la matrice A. Cette remarque est à la base de :

<u>TECHNIQUE 2</u> : Pour calculer une base de l'image Im f et une base du noyau Ker f, on juxtapose à la matrice A la matrice identité de <u>l'espace de départ</u> $\mathbb{R}^n$ et on applique l'algorithme de Gauss aux COLONNES de A jusqu'à ce que A soit transformée en une matrice triangulaire INFÉRIEURE A', tout en répercutant chaque opération sur les colonnes de la matrice identité. Alors les colonnes non nulles de A' forment une base de l'image de f et les colonnes de la transformée de l'identité correspondant à des colonnes nulles dans A' forment une base de Ker f.

Ex : $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 4t,\ x + 2z + 3t)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) & f(\vec{e}_4) \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \xleftarrow{f} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \end{array} \\ Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{array}{l} A = \\ \\ Id = \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & C_2 - 2C_1 & & C_4 - 4C_1 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & & C_3 + C_2 & 2C_4 - C_2 \\ & & \downarrow & \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{0} & \vec{0} \\ \| & \| & \| & \| \\ f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & f(\vec{u}_3) & f(\vec{u}_4) \end{array} \end{array} \xleftarrow{f} \begin{array}{c} P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{array} \end{array}$$

Base de $\mathrm{Im} f = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Base de $\mathrm{Ker} f = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$

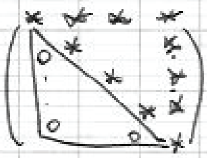
$$f(\vec{u}_3) = f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(-2,1,1,0) = (-2+2\cdot 1+4\cdot 0\,,\ -2+2\cdot 1) = (0,\ 0)$$

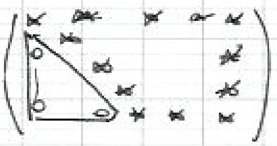
$$f(\vec{u}_4) = f\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-6+2\cdot(-1)+4\cdot 2\,,\ -6+3\cdot 2) = (0,0).$$

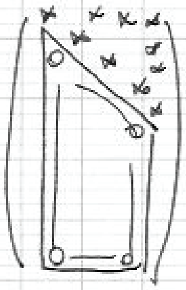
Rque: Comme il y a autant de vecteurs dans la base de $\mathrm{Im} f$ que de colonnes non nulles dans A' et autant de vecteurs dans la base de $\mathrm{Ker} f$ que de colonnes nulles dans A', on retrouve $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim$ espace de départ.

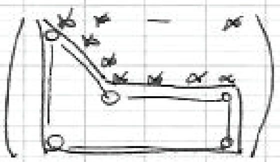
Récapitulatif du chapitre II

Résolution de systèmes échelonnés :

1e cas :  De Cramer $r = p = n$ 1 solution unique

2e cas :  $r = p < n$ ens des solution de dim $(n-r)$, c-à-d $(n-r)$ paramètres.

3e cas :  $r = n < p$ $(p-r)$ conditions de compatibilité
Si vérifiées : solution unique

4e cas :  $r < p$
$r < n$
$(p-r)$ conditions de compatibilité.
Si vérifiées : ens des solutions de dim $(n-r)$

TECHNIQUE 1 : Algorithme de Gauss pour se ramener à un système échelonné.

Sous-espaces vectoriels, familles libres, génératrice, bases.

Une famille de $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée

Thm : tout sev de $\mathbb{R}^n$ admet une base
Thm de la dimension : toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Applications linéaires, noyau, image, rang

Thm du rang:
dim espace départ = dim image + dim noyau

TECHNIQUE 2: Calcul de bases de Im f et Ker f.