III. Algèbre matricielle :

1. Opérations sur les matrices

Notation : On note $M_{p,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes, n colonnes, à coefficients réels.

- si $p = n$, pour gagner de la place on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n.
- si $n = 1$, on appelle vecteur un élément de $M_{p,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^p$ (1 colonne, p ligne)
- si $p = 1$, on appelle covecteur un élément de $M_{1,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ (1 ligne, n colonnes)
- si $p = 1 = n$, on obtient simplement l'ens. des réels.

Qq matrices importantes :

- matrice nulle (p,n) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- matrice identité (n,n) $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Rque : $M_{p,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$

a. Somme de matrice :

On peut additionner deux matrices de même taille en additionnant leurs coefficients :

ex : $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rque : Si f et g sont deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ alors $f + g$ est une application linéaire dont la matrice est la somme de la matrice de f et de la matrice de g.

b. Multiplication par un scalaire :

On peut multiplier une matrice (p, n) par un réel λ en multipliant tous les coefficients de la matrice par λ :

Ex : $2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

$$\lambda \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 5\lambda \\ 6\lambda & 7\lambda & 9\lambda \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Produit de matrices :

On reprend l'exemple de la fabrique de manteaux (chap II introd ex 2)

	taille	S	M	L	XL
tissu	Rouge	0,4	0,5	0,6	0,7
	Bleu	1	1,1	1,2	1,3
	Doublure	1,5	1,7	1,9	2,1

Chaque tissu est tissé à l'aide de plusieurs fils : coton, polyester, et polyamide. Pour chaque mètre carré de tissu on a besoin :

tissu	Rouge	Bleu	Doublure
Coton	500 m	400 m	1000 m
Polyamide	1000 m	900 m	700 m
Polyester	500 m	600 m	0

L'entreprise veut produire a manteaux de taille S, b manteaux de taille M, c de taille L et d de taille XL. Quelle quantité de fil de chaque catégorie doit-elle commander ?

$$R = a0,4 + 0,5\,b + 0,6\,c + 0,7\,d$$
$$B = 1a + 1,1\,b + 1,2\,c + 1,3\,d$$
$$D = 1,5\,a + 1,7\,b + 1,9\,c + 2,1\,d$$

$$\begin{aligned}
\text{Coton} &= 500\,R + 400\,B + 1000\,D \\
&= 500(0,4\,a + 0,5\,b + 0,6\,c + 0,7\,d) \\
&+ 400(1\,a + 1,1\,b + 1,2\,c + 1,3\,d) \\
&+ 1000(1,5\,a + 1,7\,b + 1,9\,c + 2,1\,d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (500 \times 0,4 + 400 \times 1 + 1000 \times 1,5)\,a \\
&+ (500 \times 0,5 + 400 \times 1,1 + 1000 \times 1,7)\,b \\
&+ (500 \times 0,6 + 400 \times 1,2 + 1000 \times 1,9)\,c \\
&+ (500 \times 0,7 + 400 \times 1,3 + 1000 \times 2,1)\,d
\end{aligned}$$

$$= 2100\,a + 2390\,b + 2680\,c + 2970\,d$$

Ecriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} \text{Coton} \\ \text{Polyamide} \\ \text{Polyester} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 400 & 1000 \\ 1000 & 900 & 700 \\ 500 & 600 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 1 & 1,1 & 1,2 & 1,3 \\ 1,5 & 1,7 & 1,9 & 2,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2100 & 2390 & 2680 & 2970 \\ 2350 & 2680 & 3010 & 3340 \\ 800 & 910 & 1020 & 1130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Déf: Soient $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

et $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

On appelle produit des matrices B et A et on note BA la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le m}}$ $\in M_{p,m}(\mathbb{R})$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$$

Ex. : $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4&0&1&1\\2&0&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}11&0&6&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

En généralisant l'exemple du monteurs on obtient :

Prop: Si X, Y, Z sont des vecteurs liés par $Z = BY$ et $Y = AX$ avec A et B des matrices, alors $Z = CX$ où $C = BA$.

Prop : Soient $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Notons $A \in M_{n,m}$ la matrice de f, $B \in M_{p,n}$ la matrice de g. Alors la matrice de $g\circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est $C = BA \in M_{p,m}$

__Bonnes propriétés du produit de matrices:__

1. Si $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q,l}(\mathbb{R})$ on a : $A(BC) = (AB)C$
   i.e le produit de matrices est associatif.
2. Si $A_1, A_2 \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B_1, B_2 \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ on a : $(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$
   $A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$
   i.e le produit est distributif par rapport à l'addition.
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ alors $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4. Si $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et I_n est la matrice identité (n,n) alors $AI_n = A$.
5. Si $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et Id_p est la matrice identité (p,p) alors $I_pA = A$.

Mauvaises propriétés du produit de matrices

1. Le produit BA n'est pas toujours défini : il faut que B ait autant de colonnes que A de lignes
2. En général $AB \neq BA$ même pour des matrices carrées (le produit de matrices n'est pas commutatif)
3. On peut avoir $AB = 0$ sans que A ni B soient nuls
4. L'égalité $AB = AC$ avec $A \neq 0$ <u>n'implique pas</u> que $B = C$

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $AB \neq BA$; $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$; $AB = AC$ mais $B \neq C$.

d. Transposée d'une matrice :

<u>Déf</u> : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de taille (p,n). On appelle <u>transposée</u> de A et on note A^T la matrice de taille (n,p) définie par

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}$$

<u>ex</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ (on échange lignes et colonnes)

Propriétés : 1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

Application : le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

s'écrit également :

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y = (x_1 \; x_2 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. Le groupe des matrices carrées inversibles $GL_n(\mathbb{R})$

Déf : La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = AB = I_n$

Rque : D'après le chapitre 1, si A est inversible l'inverse est unique. On le note A^{-1}.

Notation : On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille (n, n).

Prop : L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication des matrices est un groupe.

Propriétés : 1) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Dem : 1) cf chap 1

2) $(A^T) \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I_n^T = I_n$

$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n$

TECHNIQUE 3 : Calcul de l'inverse d'une matrice ou preuve de non-inversibilité :

Pour savoir si une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible et calculer son inverse on juxtapose à A la matrice identité I_n de taille (n,n) et on applique la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de la matrice $(n, 2n)$ obtenue. Si on trouve n pivots non nuls sur les n premières colonnes alors A est $\underbrace{\text{inversible}}_{\text{Sinon A n'est pas inversible}}$. Par des opérations élémentaires "remontantes" sur les lignes on peut remplacer les n premières colonnes par les colonnes de I_n. Alors les n dernières colonnes sont les colonnes de A^{-1}.

ex1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \; L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

coeff diagonaux non nuls $\Rightarrow$ A inversible

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \; L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3+2}{5} \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

__Ex 2 :__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

éléments diagonaux non nuls $\Rightarrow$ A inversible

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -L_2 \\ \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

__Rque :__ Cette méthode d'inversion de matrice marche aussi si on effectue les opérations sur les __colonnes__ mais pas si on __mélange__ des opérations sur les lignes et les colonnes.

3. Rang d'une matrice

Déf: Le rang d'une matrice A est le nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indépendants que l'on peut extraire de A.

ex: Le rang de $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ est 2.

En effet, montrons que les deux première colonnes de A sont libres: considérons l'équation

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Comme l'unique solution du système est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, les colonnes C_1 et C_2 sont libres.

Montrons que la famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est liée:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On obtient une infinité de solutions paramétrées par $\lambda_3 = t \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 = -2\lambda_2 = \frac{8}{3}t$

$$\lambda_2 = -\frac{4}{3}t$$

Ainsi $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix} t$ est la droite solution.

$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\}$ est liée.

De même $\{C_1, C_2, C_4\}$ est liée.

<u>Prop:</u> Le rang d'une matrice en échelons est le nombre de coefficients diagonaux non nuls de A, autrement dit le nombre de lignes non nulles de A.

<u>Dem:</u> Soit
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & \dots & C_r & \dots & C_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$
avec $a_{ii} \neq 0$ $\forall 1 \leq i \leq r$

Montrons que $\text{rg}\, A = r$.

Les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_r$ sont libres car l'équation $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_r C_r = 0$ d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ donne lieu à un système de Cramer:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_r a_{1r} = 0 \\ \qquad \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_r a_{2r} = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad \lambda_r a_{rr} = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$

~~Toute autre colonne C_j, $j > r$ est combinaison linéaire des colonnes $C_1, \dots, C_r$ car l'équation $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_r C_r = C_j$ d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ donne lieu à un système de Cramer:~~

$$\cancel{\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_r a_{1r} = a_{1j} \\ \qquad \ddots \\ \qquad\qquad \lambda_r a_{rr} = a_{rj} \end{cases}}$$

Ainsi la famille $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ est libre et si on lui ajoute n'importe quelle autre colonne $c_j, j>r$, la famille devient liée. On en déduit que le rang de A est $\geq r$. De plus comme les vecteurs colonnes sont des vecteurs de $\mathbb{R}^r$ (les dernières composantes étant nulles) on a $\operatorname{rg} A \leq r$ ($(r+1)$-vecteurs de $\mathbb{R}^r$ sont nécessairement liés).
Conclusion : $\operatorname{rg} A = r$.

<u>Rque:</u> le rang d'un <u>système</u> linéaire échelonné est le rang de la matrice des coefficients du système.
<u>Déf.</u> Plus généralement, on définit le rang d'un <u>système</u> linéaire qcq (pas néc. échelonné) comme le rang de la matrice des coeff.
<u>Prop:</u> Les opérations élémentaires suivantes sur une matrice A ne changent pas le rang de la matrice :
1) échanger 2 colonnes de A
2) Multiplier une colonne par un coefficient <u>non nul</u>.
3) ajouter à une colonne une comb. linéaire des <u>autres</u> colonnes.

<u>Dem:</u> 1) Le nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indépendants ne dépend pas de l'ordre des vecteurs.
2) Si $c_1, c_2, \dots, c_k$ sont linéairement indép., il en est de même de $\lambda c_1, c_2, \dots, c_k$ à condition que $\lambda \neq 0$.
3) Si $c_1, \dots, c_k$ sont lin. indép. alors

$C_1, \dots, C_{h-1}, C_h + \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_j C_j$ sont linéairement indépendants car l'équation

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_h \left(C_h + \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_j C_j \right) = 0$$

est équivalente à :

$$(\lambda_1 + \lambda_h \alpha_1) C_1 + \dots + (\lambda_{h-1} + \lambda_h \alpha_{h-1}) C_{h-1} + \lambda_h C_h = 0$$

dont l'unique solution est

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_h \alpha_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_{h-1} + \lambda_h \alpha_{h-1} = 0 \\ \lambda_h = 0 \end{cases}$$

(car les $C_1, \dots, C_k$ sont libres). Or la dernière équation $\lambda_k = 0$ implique $\lambda_1 = 0, \dots$ $\lambda_{k-1} = 0$.

<u>Conséquence:</u> Pour calculer le rang d'une matrice A, on fait des opérations élémentaires sur les colonnes de A pour se ramener à une matrice échelonnée. Le rang de A est alors le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée obtenue.

<u>Thm:</u> (Admis) Le rang de A est égal au rang de A^T.

<u>Conséquence:</u> Pour calculer le rang d'une matrice A on peut également effectuer des opérations élémentaires sur les <u>lignes</u> de A pour se ramener à une matrice échelonnée (car les ligne de A sont les colonnes de A^T et A et A^T ont le même rang).

Prop: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Le rang de f (i.e la dimension de $\mathrm{Im} f$) est égal au rang de A (c-à-d au nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indép. que l'on peut extraire de A).

Dem: L'image de f est engendrée par les vecteurs colonnes de A : tout vecteur $\vec{v} \in \mathrm{Im} f$ est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A. En effet, soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un antécédent de $\vec{v} \in \mathrm{Im} f$: $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Le vecteur $\vec{u}$ s'écrit dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{e_1} + \dots + \alpha_n \vec{e_n} \quad \text{où } \vec{e_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

Donc
$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(\alpha_1 \vec{e_1} + \dots + \alpha_n \vec{e_n}) \\ &= \alpha_1 f(\vec{e_1}) + \dots + \alpha_n f(\vec{e_n}) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n. \end{aligned}$$

Comme les vecteurs colonnes de A engendrent $\mathrm{Im} f$ il suffit d'en extraire une famille libre maximale pour avoir une base (cf la dem de la prop "Tout sev $P \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ admet une base").
Par définition, le nombre maximal de vecteurs colonnes de A lin. indép. est le rang de A.

Thm (Admis) Soient $p \geq 1$, $n \geq 1$ et $R = \min(p,n)$. Alors l'ensemble des matrices de rang R est "dense" dans $M_{p,n}(\mathbb{R})$. Autrement dit, si on choisit une matrice à p lignes n colonnes au hasard, on a de grandes chances de tomber sur une matrice de rang $R = \min(p,n)$.

Conséquences sur les systèmes linéaires :

- si $p = n$: un système linéaire de n équations à n inconnues admet en général une solution unique (après avoir échelonné le système, on s'attend à obtenir un système de Cramer)

  ⚠ ce n'est pas toujours le cas comme le montre le système suivant admettant une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 6y - 11z = 0 \\ x - 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

- Si $p < n$: un système de p équations à n inconnues avec $n > p$, admet en général une infinité de solutions paramétrée par $(n-p)$ paramètres. ⚠ ce n'est pas tjs le cas, comme le prouve la résolution du système suivant qui n'admet pas de solutions :

Expérience : changer un des coeff. du système suivant et le résoudre

$$\begin{cases} x + 2z + t + s = 2 \\ 2x + y + 3z - t + 2s = 0 \\ -2x - y + z - 3t + 2s = 1 \\ 3x + 2y + t - s = 1 \end{cases} \quad (\text{cf TD exo } 4)$$

- Si $p > n$: un système linéaire avec plus d'équations que d'inconnues et second membre non nul n'admet en général pas de solution.

  ⚠ Ce n'est pas toujours le cas, par ex le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions.