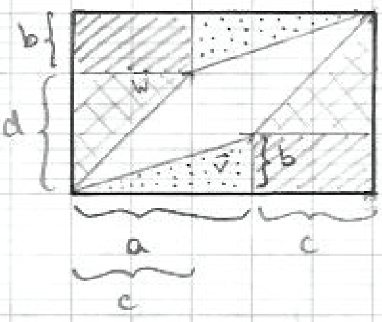
IV Déterminants :

Dans ce chapitre, on se restreint aux matrices carrée $n \times n$.

1. Aire et volume

a. Aire d'un parallélogramme du plan $\mathbb{R}^2$

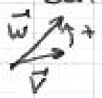
Problème : Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.



$$\mathcal{A} = (a+c)(b+d) - \frac{1}{2} ab \times 2$$

$$- 2bc - \frac{1}{2} cd \times 2$$

$$\mathcal{A} = ab + ad + bc + cd - ab$$
$$- 2bc - cd$$
$$= ad - bc$$

Convention : on note positivement l'aire si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment un repère direct (c'est le cas dans notre exemple )
et négativement sinon.
(c'est-à-dire avec un signe + ou -)

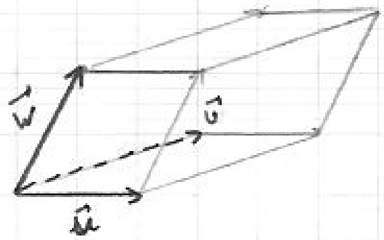
Avec cette convention, l'aire algébrique $\tilde{\mathcal{A}}$ du parallélogramme engendré par $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est

$$\tilde{\mathcal{A}} = ad - bc$$

c'est ce qu'on appelle le déterminant de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et on le note

$$\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

b. Volume d'un parallélépipède de l'espace $\mathbb{R}^3$

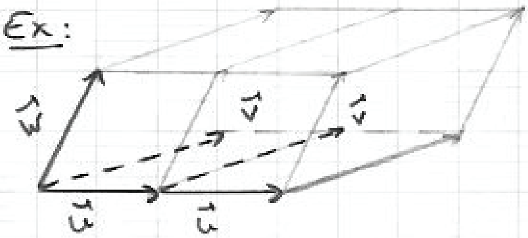


$\mathcal{V}$ = base × hauteur

Propriétés du volume

1) Si on multiplie un des vecteurs par k, le volume est multiplié par k :

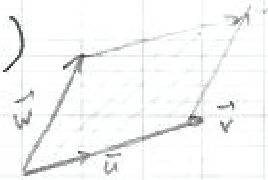
Ex :



Volume du parallélépipède construit sur $2\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

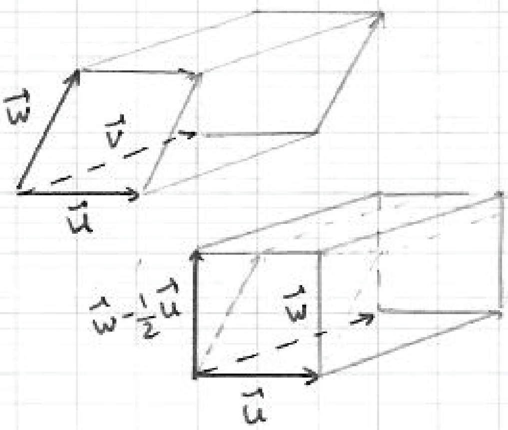
$= 2 \times$ Volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Si deux des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires alors le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nul (parallélépipède plat)



3) Si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des <u>autres</u> vecteurs, le volume ne change pas :

Ex :

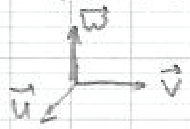


Volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

=

Volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u}$

<u>Convention</u> : On note positivement le volume si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment un repère direct
($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ selon les 3 doigts de la main droite
$\vec{u}$ = pouce , $\vec{v}$ = index , $\vec{w}$ = majeur)
négativement sinon.



<u>Prop</u> : Le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ est

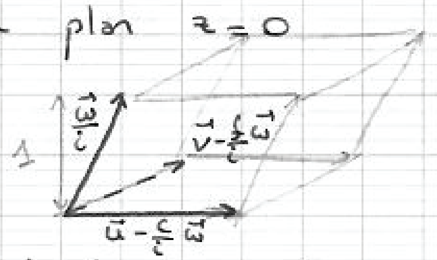
$$\tilde{\mathcal{V}} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

<u>Dem</u> : - Supposons d'abord $i \neq 0$. Alors le volume du parall. construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est égal à $i \times$ le volume du parall. construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\frac{1}{i}\vec{w} = \begin{pmatrix} g/i \\ h/i \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce dernier volume est égal au volume du parall. construit sur $\vec{u} - \frac{c}{i}\vec{w}$, $\vec{v} - \frac{f}{i}\vec{w}$ et $\frac{1}{i}\vec{w}$ avec

$$\vec{u} - \frac{c}{i}\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} g/i \\ h/i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{cg}{i} \\ b - \frac{ch}{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $$\vec{v} - \frac{f}{i}\vec{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} g/i \\ h/i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - \frac{fg}{i} \\ e - \frac{fh}{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or les vecteurs $\vec{u} - \frac{c}{i}\vec{w}$ et $\vec{v} - \frac{f}{i}\vec{w}$ appartiennent au plan $z = 0$



Le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u} - \frac{c}{i}\vec{w}$, $\vec{v} - \frac{f}{i}\vec{w}$ et $\frac{1}{i}\vec{w}$ est donc la base $\times$ hauteur

où la hauteur = 1
et la base = aire du parallélogramme engendré par $\vec{u} - \frac{c}{i}\vec{w}$ et $\vec{v} - \frac{f}{i}\vec{w}$, c-à-d

$$\det\left(\vec{u} - \frac{c}{i}\vec{w}, \vec{v} - \frac{f}{i}\vec{w}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a - \frac{cg}{i} \\ b - \frac{ch}{i}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d - \frac{fg}{i} \\ e - \frac{fh}{i}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(a - \frac{cg}{i}\right)\left(e - \frac{fh}{i}\right) - \left(b - \frac{ch}{i}\right)\left(d - \frac{fg}{i}\right)$$

Finalement, le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vaut

$$\tilde{\mathcal{V}} = i \times \left[ae - \frac{afh}{i} - \frac{ceg}{i} + \cancel{\frac{cfgh}{i^2}} - bd + \frac{bfg}{i} + \frac{cdh}{i} - \cancel{\frac{cfhg}{i^2}}\right]$$

$$\tilde{\mathcal{V}} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

- Si $i = 0$ mais c ou $f \neq 0$, on se ramène au cas précédent en échangeant l'ordre du vecteurs et en utilisant le fait que le volume algébrique du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ = − le volume algébrique du parallélépipède engendré par $\vec{w}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}$.

- si $i = c = f = 0$, alors le parallélépipède est plat (contenu dans le plan $z = 0$) et le volume est nul : cohérent avec la formule.

2. Définition et propriétés du déterminant d'une matrice $n \times n$.

a. Définition :

Déf: Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de taille (n, n). On appelle déterminant de A et on note $\det A$ le nombre suivant

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

où S_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de $\sigma \in S_n$.

<u>Exemples:</u>

- <u>$n=2$:</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Le groupe S_2 des permutations de $\{1, 2\}$ contient $2! = 2$ éléments : $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et la transposition $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)$.

Ainsi $\det A = \varepsilon(id)\, a_{11} a_{22} + \varepsilon(\sigma)\, a_{\overset{2}{\sigma(1)}1}\, a_{\overset{1}{\sigma(2)}2}$

Or la signature d'une transposition est -1, donc :

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- <u>$n=3$:</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Le groupe S_3 des permutations de $\{1, 2, 3\}$ contient $3! = 6$ éléments :

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

$$\sigma_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \quad \sigma_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (3\ 2)$$

$$\sigma_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \quad \sigma_{132} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

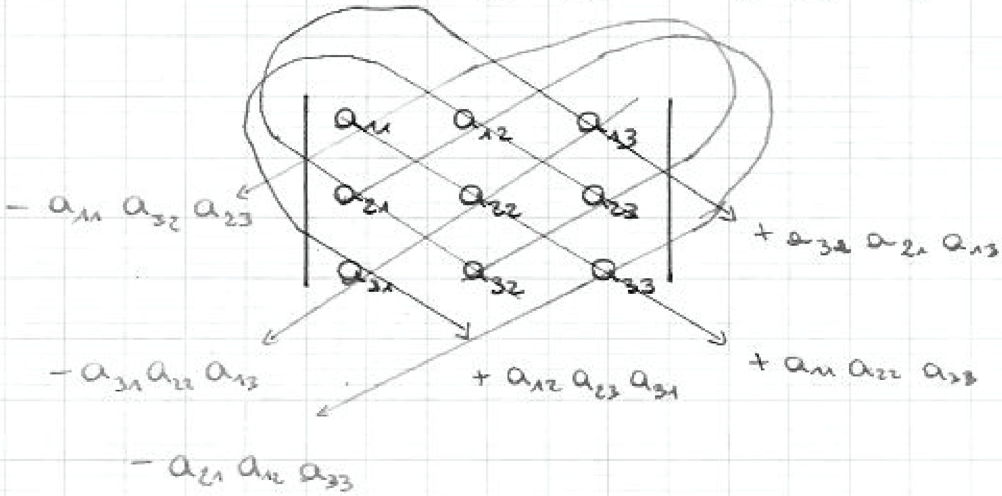
$$= (1\ 3\ 2)$$

On a $\varepsilon(id) = 1$

$$\varepsilon(\sigma_{12}) = \varepsilon(\sigma_{13}) = \varepsilon(\sigma_{23}) = -1$$

$$\varepsilon(\sigma_{123}) = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1 = \varepsilon(\sigma_{132}).$$

Ainsi
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$



<u>Règle de Sarrus</u>

<u>Exo:</u> en remplaçant a_{ij} par $a, b, c, d\ldots$ vérifier que l'expression du volume algébrique du parallélépipède construit sur 3 vecteurs est bien le déterminant de la matrice formée par ces 3 vecteurs.

b. <u>Premières propriétés</u> :

<u>Prop:</u> $\det A = \det A^T$

<u>Dem:</u> Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ et $A^T = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ la matrice transposée de A avec $b_{ij} = a_{ji}$.

Par définition, $\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n}$

Pour $\sigma \in S_n$, considérons le terme $\varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n}$.
On réordonne le produit par ordre croissant de l'indice des lignes : si $\sigma(j) = i$ alors $j = \sigma^{-1}(i)$.
Ainsi $\varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma^{-1}(1)} \dots b_{n\sigma^{-1}(n)}$.
De plus $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ car la signature est un morphisme de groupe à valeurs dans ± 1
$\left(\varepsilon(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\varepsilon(\sigma)} \text{ et } \frac{1}{1} = 1 \, , \, \frac{1}{-1} = -1 \right)$.

Ainsi $\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, b_{1\sigma^{-1}(1)} \dots b_{n\sigma^{-1}(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

On pose $\rho = \sigma^{-1}$: lorsque σ parcourt S_n, ρ parcourt également S_n. Donc $\det A^T = \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho)\, a_{\rho(1)1} \dots a_{\rho(n)n}$

$$= \det A.$$

<u>Propriétés</u> :

1) Le déterminant change de signe si on permute deux $\left\{ \begin{array}{l} \text{lignes} \\ \text{colonnes} \end{array} \right\}$ de la matrice.

2) Le déterminant dépend linéairement de chaque $\left\{ \begin{array}{l} \text{ligne} \\ \text{colonne} \end{array} \right\}$.

<u>Ex</u> : $\det \begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} a+\lambda a' & b \\ c+\lambda c' & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$$

3) Le déterminant est nul si deux $\left\{ \begin{array}{l} \text{lignes} \\ \text{colonnes} \end{array} \right\}$ sont proportionnelles.

En particulier, le déterminant est nul si deux $\begin{cases}\text{lignes}\\ \text{colonnes}\end{cases}$ sont égales.

4) Le determinant est nul si une ligne ou une colonne est nulle.

<u>Dem:</u> Comme les colonnes de A sont les lignes de A^T et que $\det A = \det A^T$, il suffit de démontrer chaque propriété soit sur les lignes, soit sur les colonnes

1) Notons C la matrice obtenue en échangeant le lignes k et l de $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$:
$C = (c_{ij} = a_{\tau(i)j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ où τ est la transposition $(k\ l)$ échangeant k et l.

On a :

$$\det C = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\tau(\sigma(1))1} \cdots a_{\tau(\sigma(n))n}$$

On fait un changement d'indice : on pose $\sigma' = \tau\circ\sigma \Leftrightarrow \sigma = \tau^{-1}\circ\sigma'$. Lorsque σ parcourt S_n, σ' parcourt également S_n. Donc

$$\det C = \sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\tau^{-1}\circ\sigma')\, a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\tau^{-1})\,\varepsilon(\sigma')\, a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n}$$

$$= -\sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\sigma')\, a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n} = -\det A$$

car $\varepsilon(\tau^{-1}) = -1$ pour une transposition τ.

2) Grâce à la propriété 1), il suffit de démontrer que le déterminant est linéaire par rapport à la première colonne (on se ramène à ce cas en échangeant les colonnes). Soient $\vec{v_1}, \vec{v_1}', \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ $(n+1)$-vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On cherche à montrer que $\det(\vec{v_1}+\lambda\vec{v_1}', \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$

$$= \det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}) + \lambda \det(\vec{v_1}', \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$$

Notons $(a_{ij})_{1\leq i\leq n}$ les coordonnées du vecteur $\vec{v_j}$, $1\leq j\leq n$
et $(a_{i1}')_{1\leq i\leq n}$ les coord. du vecteur $\vec{v_1}'$.

On a :

$$\det(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{11}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$+ \sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=2}} \varepsilon(\sigma)\, a_{21}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} + \dots +$$

$$+ \sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{n1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= a_{11} \underbrace{\Big(\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\Big)}_{\alpha_1}$$

$$+ a_{21} \underbrace{\Big(\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=2}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\Big)}_{\alpha_2}$$

$$+ \dots + a_{n1} \underbrace{\Big(\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\Big)}_{\alpha_n}$$

coeff indep des $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$

$$\det(\vec{v_1}+\lambda\vec{v_1}', \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}) = (a_{11}+\lambda a_{11}')\alpha_1 + (a_{21}+\lambda a_{21}')\alpha_2$$
$$+ \dots + (a_{n1}+\lambda a_{n1}')\alpha_n$$
$$= \det(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}) + \lambda \det(\vec{v_1}', \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$$

3) Le determinant est nul si deux lignes sont identiques : En effet, en échangeant ces deux

lignes la matrice ne change pas mais par la propriété 1) le déterminant change de signe.
Or $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$.
Si deux ligne sont proportionnelles, on utilise la linéarité démontrée en 2) pour se ramener au cas où les deux lignes sont identiques.
4) D'après l'écriture du déterminant utilisée en 2), le déterminant est nul si la première colonne est nulle ($a_{11} = 0, \dots, a_{n1} = 0$). On se ramène à ce cas là en permutant les colonnes.

c. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

Déf: Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice. On appelle mineur du coefficient a_{ij} le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On le note Δ_{ij}.

Thm:
a. Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne:
Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a:
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij}$$

b. Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne:
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a:
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Ex:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Moyen mnémotechnique : tableau de signe $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Dem: Puisque $\det A = \det A^T$, il suffit de prouver a).
En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $j^{ième}$ colonne, on a :

$$\det(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(c_1, \dots, c_{j-1}, e_i, c_j, \dots, c_n)$$

où c_k, $1 \leq k \leq n$, désigne la colonne k de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Il suffit donc de montrer que
$$\det(c_1, \dots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \dots, c_n) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

En échangeant successivement le vecteur $\vec{e_i}$ avec le suivant, on a :
$$\det(c_1, \dots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \dots, c_n)$$
$$= -\det(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, e_i, \dots, c_n)$$
$$= (-1)^{n-j} \det(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n, e_i)$$

En échangeant successivement la ligne i avec la suivante, on a :
$$\det(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n, e_i)$$
$$= (-1)^{n-i} \det(c_1', \dots, c_{j-1}', c_{j+1}', \dots, c_n', e_n)$$

où $c_k' = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{i-1\,k} \\ a_{i+1\,k} \\ \vdots \\ a_{nk} \\ a_{ik} \end{pmatrix}$

Ainsi $\det(c_1, \dots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \dots, c_n)$
$$= \underbrace{(-1)^{2n-i-j}}_{=(-1)^{i+j}} \det(c_1', \dots, c_{j-1}', c_{j+1}', \dots, c_n', e_n)$$

Il reste à montrer que

$$\det(\underbrace{c_1', \dots, c_{j-1}', c_{j+1}', \dots, c_n'}_{\text{colonnes de la matrice obtenue à partir de A en barrant la colonne } j \text{ et la ligne } i}, e_n) = \Delta_{ij}.$$

Notons b_{ij} les coeff de la matrice constituée des vecteurs colonnes $c_1', \dots, c_{j-1}', c_{j+1}', \dots, c_n', e_n$.
On a $b_{nn} = 1$, $b_{in} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

$$\det(c_1', \dots, c_{j-1}', c_{j+1}', \dots, c_n', e_n)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n}$$

Si $\sigma(n) \neq n$, $b_{\sigma(n)n} = 0$. Si $\sigma(n) = n$, $b_{nn} = 1$, la restriction de σ à $\{1, \dots, n-1\}$ est un élément σ' de S_{n-1} de même signature et on a :

$$\varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma')\, b_{\sigma'(1)1} \dots b_{\sigma'(n-1)n-1}$$

Enfin tout $\sigma' \in S_{n-1}$ est la restriction à $\{1, \dots, n-1\}$ d'un et un seul $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(n) = n$.
Ainsi

$$\det(c_1', \dots, c_{j-1}', c_{j+1}', \dots, c_n', e_n)$$
$$= \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma')\, b_{\sigma'(1)1} \dots b_{\sigma'(n-1),n-1} = \det\left((b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n-1 \\ 1 \le j \le n-1}}\right)$$
$$= \Delta_{ij}.$$

<u>Corollaire :</u>
Le déterminant d'une matrice triangulaire est produit des coefficients diagonaux.

<u>Ex :</u> $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \times \det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{0} & 0 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 4 & 5 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$= 1 \times 2 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5!$$

d. <u>Calculs de déterminants (n,n) avec $n \geq 4$:</u>

<u>Principe:</u> Si une ligne ou une colonne possède beaucoup de 0, on développe par rapport à cette ligne ou cette colonne.

Sinon on fait des opérations de lignes ou de colonnes pour se ramener à une matrice triangulaire.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \\ L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} L_2 \leftrightarrow L_4 \quad = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 + 2L_2 \end{matrix}$$

$$= +7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{vmatrix} L_3 \leftarrow -\frac{1}{7} L_3$$

$$= +7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & -12/7 \end{vmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 9L_3 \quad = -12$$

e. Propriétés fondamentales du déterminant.

Prop: Si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors
$\det(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$
où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ

Dem: Nous l'avons montré lorsque σ est une transposition (le déterminant change de signe lorsque l'on permute deux colonnes). Or les transpositions engendre S_n (cf chap I), donc toute permutation σ s'écrit comme un produit de transpositions $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$. Ainsi
$\det(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \det(\vec{v}_{\tau_1(\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1))}, \dots, \vec{v}_{\tau_1(\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n))})$
$= \varepsilon(\tau_1) \times \varepsilon(\tau_2) \times \dots \times \varepsilon(\tau_n) \det(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$
Comme la signature est un morphisme de groupe de S_n dans $\{\pm 1\}$, on a:
$$\varepsilon(\tau_1) \times \varepsilon(\tau_2) \times \dots \times \varepsilon(\tau_n) = \varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_n) = \varepsilon(\sigma)$$
Ainsi $\det(\vec{v}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$

Prop: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
lorsque A est une matrice (n, n).

Dem: Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. Nous avons montrer que le déterminant est linéaire par rapport à <u>chaque</u> colonne. Or λA est la matrice ayant pour colonnes $\lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n$. Ainsi $\det \lambda A = \det(\lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n)$
$= \lambda^n \det(C_1, C_2, \dots, C_n) = \lambda^n \det A$.

<u>Thm</u>: $\det(AB) = \det A \times \det B$

<u>Dem</u>: Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\text{vecteurs colonnes}}$

$$B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = (b_1, \dots, b_n)$$

et $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = (C_1, \dots, C_n)$.

On a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Ainsi la colonne C_j de C a pour composantes :

$$C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kj} \end{pmatrix}$$

$$= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= b_{1j} a_1 + b_{2j} a_2 + \dots + b_{nj} a_n$$

Ainsi $\det AB = \det C = \det(C_1, \dots, C_n)$
$= \det\left(b_{11} a_1 + b_{21} a_2 + \dots + b_{n1} a_n, \dots, b_{1n} a_1 + b_{2n} a_2 + \dots + b_{nn} a_n\right)$

$$= \det\left(\sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1} a_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} b_{k_2 2} a_{k_2}, \dots, \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_n n} a_{k_n}\right)$$

Par linéarité, on obtient :

$$\det AB = \sum_{1\le k_1, \dots, k_n \le n} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \dots b_{k_n n} \det(a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$$

Si 2 parmi les indices $k_1, k_2, \dots, k_n$ sont égaux, $\det(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}) = 0$.

Si les indices $k_1, k_2, \dots, k_n$ sont deux à deux distincts, on note σ la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

Alors $\det(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}) = \det(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$.
D'après la proposition précédente :

$$\det(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(a_1, \dots, a_n).$$

Ainsi $\det AB = \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \dots b_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma)}\underbrace{\det(a_1, \dots, a_n)}_{\det A}$

$= \det A \times \det B.$

3. Application des déterminants:

a. Déterminants et matrices inverses

Déf : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice de taille (n,n).
. On appelle cofacteur de a_{ij} le coefficient $b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} désigne le mineur du coefficient a_{ij} (c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la colonne j et la ligne i).
La matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A.
est appelée comatrice de A et notée $\mathrm{Comat}(A)$.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$\text{comat}(A) = \begin{pmatrix} +(-1) & -0 & +2 \\ -0 & +0 & -1 \\ +1 & -1 & +(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Thm : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

1. A inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

2. Si A est inversible, son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{comat}(A)^T$$

Dem : 1. $\Rightarrow$ Supposons A inversible. Alors
$\det(AA^{-1}) = \det A \times \det(A^{-1}) = \det(I_n)$
où I_n est la matrice identité. Or $\det I_n = 1$
ainsi $\det A \neq 0$ (et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$)

$\Leftarrow$ Va découler de la démonstration du point 2.

2. Nous allons montrer que

$$(\text{comat}(A))^T \times A = (\det A)\, I_n$$

où I_n est la matrice identité (n,n).

Notons C le produit $(\text{comat}(A))^T \times A$. Les coefficients de $(\text{Comat}(A))^T$ sont les

$$b_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ki}$$

et les coefficients de C sont les

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \Delta_{ki}\, a_{kj}$$

- Si $i = j$, l'expression $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \Delta_{ki} a_{ki}$ est le développement du déterminant de A par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne, donc vaut $\det A$.
- Si $i \neq j$, l'expression $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \Delta_{ki} a_{kj}$ est le développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne du déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par la $j^{\text{ième}}$ colonne de A. C'est donc le déterminant d'une matrice dans laquelle les colonnes i et j sont identiques. Dans ce cas, $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \Delta_{ki} a_{kj} = 0$.

<u>Conclusion</u> : $c_{ij} = \det A\, \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \det A\, I_n$.

Par conséquent : $\frac{1}{\det} (\text{comat}(A))^T \times A = I_n$.

On peut montrer de la même façon que :

$$A \times \frac{1}{\det A} \left(\mathrm{comat}(A)\right)^T = I_n$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\mathrm{comat}(A)\right)^T \qquad \square$$

<u>Rque</u> : On a montré dans la démonstration que :

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

2. $(\mathrm{comat}(A))^T . A = \det A . I_n$.

<u>Application</u> :

L'inverse d'une matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible

est $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix}$

<u>Ex</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$

d'inverse $\frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b. <u>Déterminants et systèmes linéaires</u> :

<u>Prop</u> : Soit S un système linéaire de n équations à n inconnues et A la matrice des coefficients du système. Le système admet une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible, ce qui est équivalent à $\det A \neq 0$.

<u>Dem</u> : $(S) = \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, le système a une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

<u>Application:</u> Résoudre:
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 = -4 \neq 0$ donc le système admet une solution unique, donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

<u>Déf:</u> Soit S un système de n équations à n inconnues et A la matrice des coefficients du système. On dit que S est un système de Cramer si:

S admet une solution unique
$\Leftrightarrow$ A est inversible
$\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
$\Leftrightarrow$ A est de rang n.

<u>Thm:</u> La solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'un système de Cramer (S)
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$
est donnée par :
$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A} \quad \text{(formule de Cramer)}$$
où A est la matrice des coefficients du système et où Δ_j est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $j^{\text{ème}}$ colonne par le second membre $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

<u>Application:</u> $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

alors le système admet une unique solution donné par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

<u>Ex:</u> $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

<u>Dem du thm:</u>

Soit $c_1, c_2, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A de S et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ le second membre de S. On a :

$(S) \Leftrightarrow x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = B$

autrement dit B est une combinaison linéaire de $C_1, C_2, \dots, C_n$. Ainsi pour $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \det(c_1, \dots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \dots, c_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\det(c_1, \dots, c_{j-1}, c_k, c_{j+1}, \dots, c_n)}_{\text{vaut } 0 \text{ sauf si } k=j} \\ &= x_j \det A \quad \Rightarrow \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}. \end{aligned}$$

Récapitulatif du chap IV

dans $\mathbb{R}^2$: $\det(\vec{v}, \vec{w})$ = aire algébrique du parallélogramme construit sur $\vec{v}$ et $\vec{w}$

dans $\mathbb{R}^3$: $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ = volume algébrique du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$-a_{32}a_{23}a_{11}$ $\quad + a_{32}a_{21}a_{13}$

$-a_{13}a_{22}a_{31}$ $\quad + a_{11}a_{22}a_{33}$

$+a_{23}a_{12}a_{31}$

$-a_{21}a_{12}a_{33}$

$$= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{32}a_{12}a_{13} + a_{23}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

<u>Propriétés</u> :
1) $\det A = \det A^T$
2) det change de signe si on échange deux lignes/colonnes
3) det dépend linéairement de chaque ligne/colonne
4) det est nul si deux lignes/colonnes sont proportionnelles

5) det est nul si une ligne/colonne est nulle

6) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ où A est une matrice (n,n)

7) $\det(\vec{v}_{\sigma(1)}, \vec{v}_{\sigma(2)}, \dots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ où $\sigma \in S_n$

8) $\det(AB) = \det A \times \det B$.

__Calcul :__ 1) Savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne (attention au signes !)

2) le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux

3) Savoir appliquer des opérations de lignes ou de colonnes pour se ramener au cas du déterminant d'une matrice triangulaire. (attention au signe $\ominus$ qd on échange 2 lignes, le det est $\times 2$ qd on multiplie une ligne par 2, ...)

__inverse :__ $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(\operatorname{comat}(A)\right)^T$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

__Système :__ $$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y = b_2 \end{cases}$$ avec $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$

a pour solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$