V - Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

1. Définitions :

Déf : On appelle endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (vient du grec "endo" en dedans et morphisme : application qui préserve la "forme")

Déf : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de f si $\vec{v}$ est non nul et si $f(\vec{v})$ est proportionnel à $\vec{v}$, autrement dit s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Déf : On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f s'il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que

1) $\vec{v} \neq \vec{0}$
2) $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (f - \lambda \, id)(\vec{v}) = \vec{0}$.

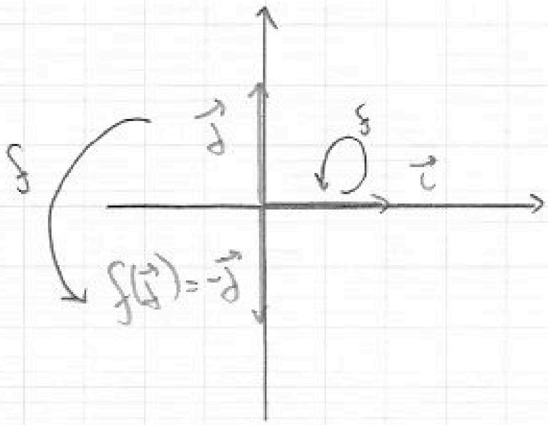
Ex : Les vecteurs non nuls du noyau de f, s'il en existe, sont les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 0 : ils vérifient $f(\vec{v}) = 0 . \vec{v} = \vec{0}$.

Déf. Soit λ une valeur propres d'un endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On appelle espace propre associé à λ et on note V_λ le noyau de l'application $f - \lambda \, id$.

Rque: V_λ est constitué du vecteur nul $\vec{0}$ et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ:

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, id) = \{\vec{0}\} \cup \left\{\begin{array}{l}\text{vecteurs propres de } f\\ \text{de valeur propre } \lambda\end{array}\right\}$$

Ex: La symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses admet deux valeurs propres : 1 et −1. L'espace propre associé à la valeur propre +1 est l'axe (Ox), et l'espace propre associé à la valeur propre −1 est l'axe (Oy)



Prop: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, V_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. De plus $V_\lambda = V_\mu \Rightarrow \lambda = \mu$ et $\mu \neq \nu \rightarrow V_\lambda \cap V_\mu = \{\vec{0}\}$.

Dem: $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, id)$ est le noyau d'une application linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$.
Supposons $V_\lambda \cap V_\mu \neq \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{v} \in V_\lambda \cap V_\mu$, avec $\vec{v} \neq 0$, alors $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ car $\vec{v} \in V_\lambda$

$= \mu \vec{v}$ car $\vec{v} \in V_\mu$

$\rightarrow (\lambda - \mu)\vec{v} = \vec{0}$ et comme $\vec{v} \neq 0$, cela implique $\lambda = \mu$.

2. Motivations

a. Mécanique quantique

Enoncé des premiers postulats de mécanique quantique

1. L'état d'un système physique quantique est caractérisé, à un instant t, par un vecteur de norme 1 * de l'espace des états $\mathcal{H}$, qui est un espace de Hilbert (généralisation d'un espace euclidien en dimension infinie).
(modulo une phase $e^{i\theta}$)
L'état du syst. est habituellement noté sous la forme d'un ket : $|\psi(t)\rangle$

2. À toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$ (par exemple la position, l'énergie ou le spin) correspond une application linéaire $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ appelé observable.

3. La mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ représentée par l'observable A ne peut fournir que l'une des valeurs propres de A (valeurs propres réelles)

4. Si λ est une valeur propre de A, la probabilité que la mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}$ effectuée sur l'état quantique $|\psi(t)\rangle$ donne pour résultat λ est égale au carré de la norme de la projection de $|\psi(t)\rangle$ sur l'espace propre associé à λ.

5. (Réduction du paquet d'onde) Si le résultat de la mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ sur l'état quantique $|\psi(t)\rangle$ est λ, alors l'état quantique du système immédiatement après la mesure est un <u>vecteur propre</u> de A associé à la valeur propre λ.

6. L'état $|\psi(t)\rangle$ de tout système quantique (non-relativiste) est une solution de l'équation de Schrödinger :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle}$$

où H est l'observable associée à l'énergie appelée <u>hamiltonien</u>.

<u>Prop</u>: <u>Conséquence</u>: Si l'hamiltonien du système est indépendant du temps (= système conservatif) les <u>états stationnaires</u> du système sont les <u>vecteurs propres de H</u>.

<u>But</u> : trouver une base de vecteurs propre de H.

<u>Dem</u>: Si $\{|\varphi_n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de vecteurs propre de H avec $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ et si $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varphi_n\rangle$ décomposition de $|\psi(t)\rangle$ selon la base $|\varphi_n\rangle$

alors $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$

$\Leftrightarrow$ $i\hbar \sum_n \frac{d}{dt} c_n(t) |\varphi_n\rangle = \sum_n c_n(t) H |\varphi_n\rangle$

$\Leftrightarrow \quad i\hbar \dfrac{d}{dt} c_n(t) = E_n \, c_n(t) \quad \forall n$

$\Leftrightarrow \quad c_n(t) = c_n(t_0) \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t_0)}$

Finalement : $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t_0) \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t_0)}}_{\text{phase dépendante du temps}} |\varphi_n\rangle$

En particulier, si $|\psi(t_0)\rangle = |\varphi_n\rangle$, alors
$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t_0)} |\varphi_n\rangle$
(même état physique)

b. Corde Vibrante

Une corde de densité μ au repos est tendue le long de l'axe des abscisses avec une tension T appliquée à ses 2 extrémités. On déforme la corde selon l'axe (Oy) et on la lâche. On appelle $y(x,t)$ le déplacement de la portion de corde à l'abscisse x et à l'instant t. En première approximation $y(x,t)$ vérifie l'équation des ondes de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}}$$

Les solutions harmoniques dans le temps, c-à-d de la forme $y(x,t) = u(x) \cos \omega t$ sont telles que :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\mu}{T} \omega^2 u(x)} \Leftrightarrow \boxed{\Delta u = k u}$$

= Equation aux valeurs propres de l'application linéaire Δ (appelée le laplacien) qui à une fonction $u(x)$ associe sa dérivée seconde $u''(x) = \dfrac{d^2 u}{dx^2}$.

3. Changement de bases :

Rappel : Une famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si c'est une famille libre et génératrice.

De manière équivalente, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$. Autrement dit, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si l'équation $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \dots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{v}$ d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ admet une solution unique quelque soit le second membre $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Prop : $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}) \neq 0$.

Dem : Le système $(S) : \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \dots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{v}$ d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a pour matrice de coefficients $A = (\vec{v_1} \ \vec{v_2} \dots \vec{v_n})$, c'est-à-dire les colonnes de A sont les coordonnées des vecteurs $\vec{v_i}$, $1 \leq i \leq n$. Ainsi le système (S) est de Cramer si et seulement si $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}) \neq 0$.

Ex : • $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$

car $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

• $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = -3 \neq 0$.

Prop: Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est uniquement déterminée par la donnée des images $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n)$ des vecteurs d'une base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Dem: Comme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$: $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$.
Si f est une application linéaire, on a

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n) \\ &= \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) + \dots + \lambda_n f(\vec{v}_n). \end{aligned}$$

Ainsi la donnée de $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n)$ permet de calculer $f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
De plus, deux applications linéaires qui coïncident sur $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ coïncident $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Def: Soient f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$.
On appelle matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes de $f(\vec{v}_j)$ selon la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Ex: Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire définie par

$$f(\vec{v}_1) = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$
$$f(\vec{v}_2) = \vec{v}_3$$
$$f(\vec{v}_3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

La matrice de f dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(\vec{v}_1) & f(\vec{v}_2) & f(\vec{v}_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{matrix} \end{array}$$

<u>Déf</u> : Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice P dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des composantes de v_j selon la base $\mathcal{B}$.

<u>Ex</u> : La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ où $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$$

<u>Rque</u> : La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ à la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'application linéaire φ définie par $\varphi(e_k) = v_k$.

<u>Prop</u> : (Changement de coordonnées d'un vecteur)
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\vec{v}$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + \dots + x_n \vec{e_n} \\ &= y_1 \vec{v_1} + y_2 \vec{v_2} + \dots + y_n \vec{v_n} \end{aligned}$$

Alors $\boxed{X = \underbrace{PY}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{Y = P^{-1} X}$

produit matricielle de la matrice P par la matrice colonne Y.

Dem: $\vec{v} = y_1 \vec{v_1} + \dots + y_n \vec{v_n} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{v_j}$

Or $\vec{v_j} = p_{1j} \vec{e_1} + p_{2j} \vec{e_2} + \dots + p_{nj} \vec{e_n}$

où $(p_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ désigne les coefficients de la

matrice P. Ainsi :

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \, p_{ij} \right)}_{x_i} \vec{e_i}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{p_{ij}}_{\text{coeff. de P sur la ligne } i} y_j$$

$\Rightarrow X = PY$.

Ex: Dans l'exemple précédent, le vecteur $3\vec{v_1} + 2\vec{v_2}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$ sont :

$$P \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Rque: En général on connaît :

- P : matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base
- X : coordonnées du vecteur dans la base initiale

et on cherche Y : coordonnées du vecteur dans la nouvelle base.

Il faut donc inverser P !

$$Y = P^{-1} X.$$

<u>Ex:</u> Dans l'exemple précédent, exprimer le vecteur ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique dans la nouvelle base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$Y = P^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Prop:</u> (Formule de changement de base)
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
Notons A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$,
B " " " $\mathcal{B}'$,
et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\boxed{B = P^{-1} A P}$$

<u>Dem:</u> Soient X les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ et Y les coordonnées du même vecteur dans la base $\mathcal{B}'$. On a :
$(*)$ $X = PY \Leftrightarrow Y = P^{-1}X$
Les coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $f(\vec{v}) = AX$.
Les coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $f(\vec{v}) = BY$
D'après $(*)$:
$$BY = P^{-1}(AX) = P^{-1}APY \quad \forall Y$$
Ainsi $B = P^{-1}AP$.

<u>Ex</u>: Dans l'ex. précédent, la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de f dans la base canonique est

$$A = P\,B\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 & -5 & -9 \\ 17 & -7 & -9 \\ 34 & -8 & -21 \end{pmatrix}$$

<u>Prop</u>: Si $A = PBP^{-1}$ alors $A^n = PB^nP^{-1}$

<u>Dem</u>: Par récurrence :

- pour $n = 1$: $A = PBP^{-1}$ (initialisation)
- supposons que $A^{n-1} = PB^{n-1}P^{-1}$ alors
  $A^n = \left(PB^{n-1}P^{-1}\right)\cdot\left(PBP^{-1}\right) = P\left(B^{n-1}\underbrace{\left(P^{-1}P\right)}_{\text{identité}}B\right)P^{-1}$

  $\Leftrightarrow A^n = PB^nP^{-1}$
- conclusion : $\forall n \geq 1$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

<u>Conséquence</u>: Si on cherche à calculer les puissances d'une matrice A, on va chercher d'abord un changement de bases pour se ramener au cas d'une matrice diagonale B dont les puissances sont faciles à calculer. Puis on calcule le produit de matrice $A = PB^nP^{-1}$.

4. Calcul des valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Déf: On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de taille (n,n) le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ où I_n est la matrice identité de taille (n,n).

Rque: 1) C'est un polynôme de degré n.

2) $P_A(\lambda)$ est invariant par changement de bases: si $B = P^{-1} A P$ alors

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(P^{-1} A P - \lambda I_n) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n) P) \\
&= \det P^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det P \\
&= \det(A - \lambda I_n) \quad \text{car } \det P^{-1} = \frac{1}{\det P}. \\
&= P_A(\lambda).
\end{aligned}$$

Déf: Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (c-à-d une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) et A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle polynôme caractéristique de f le polynôme caractéristique de A:

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

(Cette définition ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie pour écrire la matrice de f).

Thm: Les valeurs propres d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ sont les racines du polynôme caractéristique de f.

<u>Rque</u>: Par abus de langage on parle des "valeurs propres de A" au lieu des "valeurs propres de l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A".

<u>Dem</u>: $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de f s'il existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\vec{v}) = \vec{0}$
Autrement dit λ est valeur propre de f si et seulement si le noyau de l'application linéaire $f - \lambda Id$ n'est pas réduit à $\vec{0}$, c'est-à-dire $f - \lambda Id$ n'est pas bijective.
Ainsi λ est valeur propre de f ssi la matrice de $f - \lambda Id$ n'est pas inversible ce qui est équivalent à $\det(A - \lambda I) \neq 0$ où A est la matrice de f dans une base qcq de $\mathbb{R}^n$.

<u>Thm</u>: Si le polynôme caractéristique de f possède n racines distinctes réelles, alors il existe une base de vecteurs propres de f.
Dans cette base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale. On dit que f est diagonalisable.

<u>Application</u>: Pour trouver une base de vecteurs propres de f : 1) on calcule le polynôme caractéristique de f et on trouve ces racines λ_i
2) Pour chacune des racines λ_i, on trouve une base de $Ker(f - \lambda_i I)$.
(Technique 2)

<u>Rque</u>: Par abus de langage, on dit qu'une matrice A est diagonalisable ssi l'application linéaire f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A est diagonalisable.

⚠ Si le polynôme caractéristique de f admet des valeurs propres multiples, on ne sait pas si f est diagonalisable.
Par exemple, l'app. linéaire dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.