— Corrigé —

X MP 2010, Maths I

Préliminaires

1. 1a. Cela va dépendre de α.

   Si $\alpha = 0$ on peut écrire $\alpha = \lambda\beta$ avec $\lambda = 0$.

   Si $\alpha \neq 0$, $\ker\beta$ et $\ker\alpha$ serait deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$ l'un inclus dans l'autre donc égaux. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha = \lambda\beta$.

   1b. Considérons plutôt $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ une famille libre maximale extraite de $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$, qu'on complète en une base $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$.

   Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, β_i est une combinaison linaires des formes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ donc $\bigcap_{j=i}^{p} \ker\gamma_j \subset \ker\beta_i$. Alors $\bigcap_{j=1}^{p} \ker\gamma_j \subset \bigcap_{i=1}^{r} \ker\beta_i$.

   Comme $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ est une sous-famille de $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$ alors nous aussi avons l'inclusion dans le sens inverse et ainsi

   $$\bigcap_{j=1}^{p} \ker\gamma_j = \bigcap_{i=1}^{r} \ker\beta_i \subset \ker\alpha$$

   Considérons maintenant la base anté-duale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

   $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha(e_k)\gamma_k$ et comme $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n \in \bigcap_{j=1}^{p} \ker\gamma_j \subset \ker\alpha$ alors

   $$\alpha = \sum_{k=1}^{p} \alpha(e_k)\gamma_k.$$

   α est une combinaison linéaire de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ donc de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$

Première partie

2. La fonction $t \longmapsto \|\gamma(t)\|^2 = \langle\gamma(t), \gamma(t)\rangle$ est constante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$, sa dérivée $t \longmapsto 2\langle\gamma(t), \gamma'(t)\rangle$ est donc nulle sur $]-1, 1[$.

3. La famille $(x, v/\|v\|)$ est orthonormale, la fonction

   $$\gamma : t \longmapsto \cos(\|v\|\, t)x + \frac{1}{\|v\|}\sin(\|v\|\, t)v$$

   est bien définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et vérifie bien $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ et $\|\gamma(t)\| = 1$ pour tout $t \in]-1, 1[$.

4. La fonction $g : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et la sphère unité S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$, g est donc bornée et atteint ses bornes sur S^{n-1}.

   Soit x un extrémum de g et soit h un vecteur non nul orthogonal à x.

   D'après la question précédente, il existe une fonction $\gamma :]-1, 1[\longrightarrow S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = h$. La fonction $g \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

   $$\forall t \in]-1, 1[,\ (g \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

   (Ne surtout pas écrire $\mathrm{d}g_{\gamma(t)}$, S^{n-1} n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$).

   0 est un extrémum local de $g \circ \gamma$ sur l'ouvert $]-1, 1[$, donc $(g \circ \gamma)'(0) = 0$ ce qui donne en substituant 0 à t dans la formule précédente

   $$\mathrm{d}f_x(h) = 0$$

   ceci pour tout vecteur non nul h orthogonal à x. $\mathrm{d}f_x$ étant une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ nous avons donc $\ker\varphi \subset \ker \mathrm{d}f_x$, où φ est la forme linéaire $h \longmapsto \langle x, h\rangle$.

   D'après (1.), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_x = \lambda\varphi$, soit

   $$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle.$$

   N.B : Pour les élèves marocains, programme 2009, x est un extrémum de f selon la contrainte $\|x\|^2 = 1$, la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ ayant pour gradient en x le vecteur $2x$, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $gradf(x) = 2\mu x$, soit $\mathrm{d}f_x(h) = 2\mu\langle x, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

   C'est un fruit qui vous est défendu dès que votre copie est destinée à passer les frontières.

5. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. $f : x \longmapsto \langle x, Ax\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n$.

   5a. f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée des applications $x \longmapsto (x, Ax)$ qui est linéaire et du produit scalaire qui est bilinéaire.

Pour le calcul de la différentielle, mieux vaut ici utiliser la définition.

$f(x+h)-f(x) = \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle h, Ah\rangle = 2\langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle$.

L'application $h \longmapsto 2\langle Ax, h\rangle$ est linéaire et $\langle Ah, h\rangle \leqslant \|A\| \|h\|^2$ donc $\langle Ah, h\rangle = o(\|h\|)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle$$

5b. Soit x un extrémum de la restriction de f sur S^{n-1}.

D'après (4.) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle = \lambda\langle x, h\rangle$$

Nous avons donc $Ax = \dfrac{\lambda}{2}x$. x est donc un vecteur propre de A.

N.B : Nous venons de démontrer que toute matrice carrée symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle, étape essentielle dans la démonstration du théorème spectrale.

Deuxième partie

6. 6a. Archi-connu.

6b. Idem.

6c. Nous allons noter $\langle A, B\rangle$ le produit scalaire $\mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$.

Une démarche similaire à celle suivie en (5.) permet de justifier que l'application $q : M \longmapsto \langle M, M\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}q_M(H) = 2\langle M, H\rangle = 2\mathrm{Tr}\left({}^tMH\right)$$

7. La linéarité du déterminant par rapport à la j$^{\text{ème}}$ colonne permet d'écrire

$$\det(M + tE_{ij}) = \det M + t\Delta_{ij}(M)$$

où $\Delta_{ij}(M)$ est le cofacteur du coefficient d'indice (i,j) de M.

La fonction $t \longmapsto \det(M + tE_{ij})$ est donc dérivable et sa dérivée est constante de valeur $\Delta_{ij}(M)$. Ce qui signifie que l'application f admet une dérivée partielle en M selon le coefficient a_{ij} d'indice (i,j) de M et que

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(M) = \Delta_{ij}(M).$$

Les applications Δ_{ij} sont des fonctions polynomiales des coefficients de M et sont donc continues donc $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ est continue. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f_M(H) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{ij}\Delta_{ij}(M) = \mathrm{Tr}\left({}^t\widetilde{M}H\right)$$

8. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application continue det du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$, c'est donc un fermé.

g étant positive l'ensemble $I = \left\{g(M)/M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\right\}$ admet une borne inférieure que nous allons noter δ. En utilisant la caractérisation de la borne inférieure on prouve l'existence d'une suite d'éléments $(\alpha_n)_n$ de I qui converge vers δ. Considérons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément A_n de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(A_n) = \|A_n\|^2 = \alpha_n$.

La suite $(\|A_n\|^2)_n$ est convergente donc $(A_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, elle admet au moins une suite extraite $(A_{\varphi(n)})_n$ qui converge. Posons $A = \lim A_{\varphi(n)}$. Par continuité de g, $\left(g(A_{\varphi(n)})\right)_n$ converge vers $g(A)$ et donc $\delta = g(A)$. Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé alors $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et donc $\delta \in I$.

g admet donc un minimum absolue en A sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la fonction $\rho : t \longmapsto \det(e^{tM}), t \in \mathbb{R}$.

ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &= \mathrm{d}f_{e^{tM}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tM}\right) = \mathrm{d}f_{e^{tm}}\left(Me^{tM}\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(e^{tM})Me^{tM}\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(e^{tM})e^{tM}M\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left(\det(e^{tM})M\right)\\
&= \det(e^{tM})\mathrm{Tr}\,(M)
\end{aligned}$$

Ainsi ρ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \mathrm{Tr}\,(M)\,y = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \rho(t) = \lambda e^{t\mathrm{Tr}(M)}$.

Comme $\rho(0) = \det(e^0) = \det(I_n) = 1$ alors $\lambda = 1$. Pour $t = 1$ nous obtenons alors

$$\det(e^M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}.$$

10. $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{d}f_M(H) = 0$ et $\gamma : t \longmapsto Me^{tM^{-1}H},\ t \in]-1, 1[$.

Soit $t \in]-1, 1[$

$\det\left(\gamma(t)\right) = \det M \det\left(e^{tM^{-1}H}\right) = e^{t\mathrm{Tr}\left(M^{-1}H\right)} = e^{t\det(M)\mathrm{Tr}\left({}^t\widetilde{M}H\right)} = e^{t\mathrm{d}f_M(H)} = 1$.

donc γ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\gamma'(t) = M(M^{-1}H)e^{tM^{-1}H} = He^{tM^{-1}H}$$

En particulier $\gamma(0) = M$ et $\gamma'(0) = H$.

11. 11a. En considérant la fonction $g\circ\gamma$, γ étant la fonction définie dans la question précédente et qui vérifie
$$\gamma(0)=M,\ \gamma'(0)=H \text{ et } \forall t\in]-1,1[,\ \|\gamma(t)\|=1$$
comme dans (4.), on démontre que si M est un extrémum de g alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que
$$\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}q_M(H)=\lambda \mathrm{d}f_M(H)$$
Il est alors trivial que si $\mathrm{d}f_M(H)=0$ alors $\mathrm{d}q_M(H)=0$.

11b. $M\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^t\widetilde{M}=M^{-1}$ et donc
$$\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f_M(H)=\mathrm{Tr}\left(M^{-1}H\right)=\langle {}^tM^{-1},H\rangle \text{ et } \mathrm{d}q_M(H)=2\langle M,H\rangle$$
La relation $\mathrm{d}q_M=\lambda\mathrm{d}f_M$ donne alors
$$\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle {}^tM^{-1}-2\lambda M,H\rangle=0$$
et donc ${}^tM^{-1}=2\lambda M$. En appliquant le déterminant nous obtenons $(2\lambda)^n=1$ et donc $2\lambda=\pm1$.

Ainsi ${}^tMM=\pm I_n$, mais ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive, ses valeurs propres sont donc positives et donc nous ne pouvons avoir ${}^tMM=-I_n$.

Alors ${}^tMM=I_n$ ie que M est ume matrice orthogonale.

Maintenant, M étant orthogonale, ses vecteurs colonnes sont unitaires donc $q(M)=\displaystyle\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n m_{ij}^2=n$.

Troisième partie

12. 12a. L'application $(X,Y)\longmapsto XY,\ (X,Y)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, est bilinéaire et C_1 et C_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc B est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$\forall t\in\mathbb{R},\ B'(t)=C_1'(t)C_2(t)+C_1(t)+C_2'(t)$$

12b. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $D(t)=\dfrac{1}{\det(C(t))}{}^t\widetilde{C(t)}$

Les coefficient de $\widetilde{C(t)}$ sont des fonctions polynomiales de ceux de $C(t)$. Ces derniers sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de t donc aussi ceux de $\widetilde{C(t)}$ et donc $t\longmapsto\widetilde{C(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

L'application $t\longmapsto\det(C(t))$ est la composée de la fonction de plusieurs variable det et de C qui sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $t\longmapsto 1/\det(C(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi D est de classe $\mathcal{C}^1$ et en dérivant la relation $C(t)D(t)$ selon le résultat de la question précédente, nous obtenons
$$\forall t\in\mathbb{R},\ C'(t)D(t)+C(t)D'(t) \text{ soit } D'(t)=-C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}$$

13. $C_1,C_2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $C_1(0)=C_2(0)=I_n$.

13a. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Considérons l'application
$$A:t\longmapsto\exp\left(t\alpha C_0'(t)+t\beta C_2'(0)\right).$$
A est de classe $\mathcal{C}^1$, $A(0)=I_n$ et $A'(0)=\alpha C_1'(0)+\beta C_2'(0)$

13b. La fonction $t\longmapsto\det(C_1(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 en 0 donc il existe $\epsilon_1>0$ tel que
$$\forall t\in]-\epsilon_1,\epsilon_1[,\ \det(C_1(t))\geqslant\frac{1}{2}.$$
De même, il existe $\epsilon_2>0$ tel que
$$\forall t\in]-\epsilon_2,\epsilon_2[,\ \det(C_2(t))\geqslant\frac{1}{2}.$$
Il suffit ensuite de prendre $\epsilon=\min(\epsilon_1,\epsilon_2)$.

13c. $\forall(t,s)\in]-\epsilon,\epsilon[^2,\ L(s,t)=C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$.

Par bilinéarité, l'application L est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $(s,t)\in]-\epsilon,\epsilon[^2$
$$\frac{\partial L}{\partial t}(s,t)=C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}-C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}$$
$\dfrac{\partial L}{\partial t}(s,0)=C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}-C_2'(0)$, et en particulier $\dfrac{\partial L}{\partial t}(0,0)=0$.

Maintenant
$$\frac{\partial^2 L}{\partial s\partial t}(0,0)=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}\left(\frac{\partial L}{\partial t}(s,0)-\frac{\partial L}{\partial t}(0,0)\right)=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}\left(C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}-C_2'(0)\right)=$$
avec $E(s)=C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}$.

$E'(s)=C_1'(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}-C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}$

donc $E'(0)=C_1'(0)C_2'(0)-C_2'(0)C_1'(0)$. Ainsi
$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial s\partial t}(0,0)=C_1'(0)C_2'(0)-C_2'(0)C_1'(0)}$$

14. 14a. Pour tout $(X,X')\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, et pour tout $Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\Phi(XX')(Y)=XX'YX'^{-1}X^{-1}=\Phi(X)(X'YX'^{-1})=\Phi(X)\circ\Phi(X')(Y)$
donc $\Phi(XX')=\Phi(X)\circ\Phi(X')$. Φ est bien un morphisme de groupes.

Maintenant, les coefficient de XYX^{-1} sont des fonctions polynomiales des coefficients de ceux de X,Y et X^{-1}. Ceux de X^{-1} sont des fonctions rationnelles de ceux de X. Donc les coefficients de XYX^{-1} sont des fonctions rationnelles de ceux de X et de Y.

14b. Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel t voisin de 0, I_n+tX $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, puisque ce dernier est un ouvert.

Fixons $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La fonction définie au voisinage de 0, $t \longmapsto \Phi(I_n+tX)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc la fonction $t \longmapsto \Phi(I_n+tX)(Y)$ est de classe C^1 car l'application $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \longmapsto L(Y)$ est linéaire

En dérivant l'égalité $\Phi(I_n+tX)(Y) = (I_n+tX)Y(I_n+tX)^{-1}$ via les formules établies en (12b.) nous obtenons

$$\mathrm{d}\Phi_{(I_n+tX)}(X)(Y) = XY(I_n+tX)^{-1} - (I_n+tX)Y(I_n+tX)^{-1}X(I_n+tX)^{-1}$$

et en particulier pour $t=0$

$$\mathrm{d}\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX.$$

15. V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes de classe $\mathcal{C}^1$.

15a. Soit $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $X+H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sachant que f est un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} f(X+H)-f(X) &= f(X)\big(f(I_n+X^{-1}H)-f(I_n)\big) \\ &= f(X)\big(\mathrm{d}f_{I_n}(X^{-1}H)+o(\|H\|)\big) \\ &= f(X)\mathrm{d}f_{I_n}(X^{-1}H)+o(\|H\|) \end{aligned}$$

L'application $H \longmapsto f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)$ est linéaire par linéarité de la différentielle $\mathrm{d}f_{I_n}$, donc

$$\mathrm{d}f_X(H) = f(X)\mathrm{d}f_{I_n}(X^{-1}H)$$

De même, on obtient l'expression $\mathrm{d}f_X(H) = \mathrm{d}f_{I_n}(HX^{-1})f(X)$ en écrivant $f(X+H)-f(X) = \big(f(I_n+HX^{-1})-f(I_n)\big)f(X)$.

N.B : En fait il suffit que f soit différentiable en I_n pour qu'elle soit différentiable en tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et même de classe $\mathcal{C}^1$, car dans ce cas pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nul l'application $X \longmapsto f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)$ va être continue.

15b. On fixe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = f(e^{tX})$ et $b(t) = e^{t\mathrm{d}f_{I_n}(X)}$

La fonctions $t \longmapsto e^{tX}$ et $t \longmapsto e^{t\mathrm{d}f_{I_n}(X)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ et nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$a'(t) = \mathrm{d}f_{e^{tX}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tx}\right) = \mathrm{d}f_{e^{tX}}\left(Xe^{tX}\right) = \mathrm{d}f_{I_n}\left(Xe^{tX}e^{-tX}\right)f(e^{tX}) = \mathrm{d}f_{I_n}(X)a(t)$$

Les solutions de l'équation linéaire autonome du 1er ordre

$$x' = df_{I_n}(X)x$$

sont les fonctions de la forme $x : t \longmapsto e^{t\mathrm{d}f_{I_n}(X)}M$ où M est un élément quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $a(t) = e^{t\mathrm{d}f_{I_n}(X)}M = b(t)M$.

$b(0) = e^{0\mathrm{d}f_{I_n}(X)} = id_V$ ($\mathrm{d}f_{I_n}(X) \in \mathrm{GL}(V)$) et $a(0) = f(I_n) = id_V$ (f est un morphisme de groupes) donc $M = I_n$ et donc $a = b$.

15c. En considérant l'application det qui induit effectivement un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$, nous avons , d'après la question précédente, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \det(e^{tX}) = e^{t\mathrm{d}(det)_{I_n}(X)} = e^{t\mathrm{Tr}(X)}$$

Et en particulier $\det(e^X) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$.

15d. En reprenant le résultat du (15b.) avec Φ au lieu de f nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(e^{tX}) = e^{t\mathrm{d}\Phi_{I_n}(X)} = e^{t\varphi(X)}$$

et en particulier $\phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$.

16. On fixe $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose pour tout $s, t \in \mathbb{R}$

$$u(s,t) = e^{s(X+tY)}, \quad A(s,t) = e^{-sX}\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)$$

N.B :

- Bizarrement l'énoncé parle de $\mathrm{d}(\exp)_X$ sans qu'il soit nulle part question de justifier que l'application exp est différentiable. Nous ferons de même en admettant que exp est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, c'est selon ...).
- Considérons les écritures des deux dérivées partielles de u

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = (X+tY)e^{s(X+tY)},\ \frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = sYe^{s(X+tY)}$$

La première est tout à fait correcte, la deuxième complètement hasardeuse. La première repose en effet sur le résultat rappelé en début de l'énoncé :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}) = Ae^{tA},\ \text{si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

La deuxième sur une extension erronée de ce résultat qui voudrait que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{C(t)}) = C'(t)e^{C(t)}$$

si $C : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour s'en convaincre, appliquer le théorème de Schwarz à u en utilisant cette relation vous donnera $XY = YX$, les matrices X et Y étant quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$! (ce que votre humble serviteur à commencé par faire dans un excès de zèle avant de se rendre compte de son péché devant la grossièreté du résultat obtenu).

Une façon correcte d'exprimer cette dérivée est de faire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{C(t)} = \mathrm{d}(\exp)_{C(t)}(C'(t)).$$

16a. En admettant que la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = \mathrm{d}(\exp)_{s(X+tY)}(sY) = s\mathrm{d}(\exp)_{s(X+tY)}(Y)$$

d'où $A(1,0) = e^{-X}\mathrm{d}(exp)_X(Y)$.

16b. Maintenant pour pouvoir calculer effectivement $\frac{\partial A}{\partial s}$ sans dépasser la différentielle première de exp, nous allons dériver u dans un sens qui nous arrange mieux, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$ au lieu de $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$. Pour cela nous allons d'abords justifier que u est de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $u(s,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{s^p}{p!}(X+tY)^p$

On pose $v_p(s,t) = \frac{s^p}{p!}(X+tY)^p$. Les fonctions v_p sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la série de fonctions $\sum v_p(s,t)$ converge simplement vers u sur $\mathbb{R}^2$.

De plus pour tous $p \geqslant 1$

$$\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t) = \frac{s^{p-1}}{(p-1)!}(X+tY)^p \text{ et } \frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t) = \frac{s^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}(X+tY)^{k-1}Y(X+tY)^{p-k}$$

Pour les deux dérivées, en considérant une norme matricielle $\|.\|$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$)

$$\left\|\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t)\right\| \leqslant \frac{|s|^{p-1}}{(p-1)!}\big(\|X\|+|t|\,\|Y\|\big)^p \text{ et } \left\|\frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t)\right\| \leqslant \frac{|s|^p}{(p-1)!}\|Y\|\big(\|X\|+|t|\,\|Y\|\big)^{p-1}$$

Soit $r > 0$. Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(s,t)\|_\infty \leqslant r$, en posant $K = \max(\|Y\|, \|X\| + r\|Y\|)$ nous avons donc

$$\left\|\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t)\right\| \leqslant K\frac{(rK)^{p-1}}{(p-1)!} \text{ et } \left\|\frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t)\right\| \leqslant rK\frac{(rK)^{p-1}}{(p-1)!}$$

Les séries de fonctions $\sum \frac{\partial v_p}{\partial s}$ et $\sum \frac{\partial v_p}{\partial t}$ convergent donc normalement sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

Ceci prouve que pour un s fixé, la fonction $t \longmapsto u(s,t)$ est dérivable et vice versa. Ou encore que u admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Ces dérivées partielles ont pour expressions

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t).$$

La convergence normale sur tout compact des séries de fonctions $\sum \frac{\partial v_p}{\partial s}$ et $\sum \frac{\partial v_p}{\partial t}$ achève de justifier qu'en fait les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial s}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc que u est de classe $\mathcal{C}^1$.

On procède de même pour montrer que les fonctions $\frac{\partial u}{\partial s}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont à leurs tour de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et ainsi que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ensuite. Via le théorème de Schwarz, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial s}(s,t) &= -Xe^{-sX}\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + e^{-sX}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}(s,t)\\
&= -XA(s,t) + e^{-sX}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(s,t)\\
&= -XA(s,t) + e^{-sX}\frac{\partial}{\partial t}\big((X+tY)e^{s(X+tY)}\big)\\
&= -XA(s,t) + e^{-sX}\Big(Ye^{s(X+tY)} + (X+tY)\mathrm{d}(\exp)_{s(X+tY)}(sY)\Big)\\
&= e^{-sX}Ye^{s(X+tY)} - XA(s,t) + e^{-sX}(X+tY)e^{sX}A(s,t)
\end{aligned}$$

D'où : $\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = e^{-sX}Ye^{sX} - XA(s,t) + e^{-sX}Xe^{sX}A(s,t)$.

Il est aisé de justifier que $e^{sX}X = Xe^{sX} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{s^p}{p!}X^{p+1}$ et donc que

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = e^{-sX}Ye^{sX}$$

et d'après (15d.)

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \Phi(e^{-sX})(Y) = e^{\varphi(-sX)}(Y) = e^{-s\varphi(X)}(Y)$$

vu que l'application φ est linéaire.

N.B : Un résultat simple mais utile, si $\sum u_n$ est une série convergente à termes dans un evn de dimension finie E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors la série $\sum f(u_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n) = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$

Par exemple : L'application $M \mapsto XM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc : $\quad Xe^{-sX} = X\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-s)^p}{p!}X^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-s)^p}{p!}X^{p+1}.$

16c. $e^{-s\varphi(X)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-s)^p}{p!}\varphi(X)^p$ et par linéarité de l'application $\Psi : L \in$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longmapsto L(Y)$ nous avons donc

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = e^{-s\varphi(X)}(Y) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-s)^p}{p!}\varphi(X)^p(Y)$$

La fonction $s \longmapsto A(s,0)$ est la primitive de $s \longmapsto \dfrac{\partial A}{\partial s}(s,0)$ qui s'annule en 0 car $\dfrac{\partial u}{\partial s}(0,0) = s\mathrm{d}(\exp)_{sX}(Y)|_{s=0} = 0$. La série de fonction $\sum \dfrac{(-s)^p}{p!}\varphi(X)^p(Y)$ converge normalement sur tout compacte de $\mathbb{R}$, donc

$$A(s,0) = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^s \frac{(-x)^p}{p!}\varphi(X)^p(Y) = -\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-s)^{p+1}}{(p+1)!}\varphi(X)^p(Y)$$

16d. En comparant l'expression de $A(1,0)$ obtenue en (16a.) et celle qu'on peut avoir à partir de (16c.) nous avons

$$\boxed{\mathrm{d}(exp)_X(Y) = e^X \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)!}\varphi(X)^p(Y)}$$

N.B : Rappelons que $\varphi(X)(Y) = XY - YX$. Donc si Y commute avec X alors $\varphi(X)^p(Y) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ et donc

$$\mathrm{d}(\exp)_X(Y) = e^X Y = Ye^X$$

Ainsi, si $C : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $C'(t)C(t) = C(t)C'(t)$ alors pour tout $t \in I$ alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{C(t)}) = \mathrm{d}(\exp)_{C(t)}(C'(t)) = C'(t)e^{C(t)}$$

À bon entendant.

Fin.