

1. DL DES FONCTIONS ELEMENTAIRES :

Ecrire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions élémentaires suivantes à un ordre général (n , $2n+1$ ou $2n+2$ selon le cas), puis à l'ordre 5 :

$$e^x$$

$$\sin x$$

$$\cos x$$

$$\frac{1}{1+x}$$

$$\ln(1+x)$$

$$(1+x)^\alpha$$

Application : DL à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$

2. RECONNAITRE UN DL :

Question 1 : Ecrire les développements limités de la fonction $f(x) = x^3 + x$ au voisinage de 0 à l'ordre 0, 1, 2, 3 et $n \geq 3$ et préciser à chaque fois les fonctions $\epsilon(x)$ intervenant.

Question 2 : Démontrer qu'une fonction f possède un DL à l'ordre 0 au voisinage de x_0 si et seulement si f est continue en x_0 .

Question 3 : Démontrer qu'une fonction f possède un DL à l'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 .

Question 4 : Donner sans calcul:

le DL à l'ordre 8 en 0 de $\sin(x^4)$;

le DL à l'ordre 8 en 0 de $(\sin x)^4$;

le DL à l'ordre 5 en 0 de $(\tan x)^3$.

3. REGLES DE CALCUL AVEC LES DL :

- (1) **Changement de variable dans un développement limité :** Ecrire le développement limité de e^{ix} et $\sin(2x)$ à l'ordre 5.
- (2) **Somme de développements limités :** Ecrire le développement limité de $\cos(x) + i \sin(x)$ à l'ordre 5.
- (3) **Produit de développements limités :** Ecrire le développement limité de $2 \sin(x) \cos(x)$ à l'ordre 5.
- (4) **Multiplication par x :** Ecrire les DL des fonctions suivantes à l'ordre 4 au voisinage de 0 :

$$f(x) = x \sin x$$

$$g(x) = x^2(1 - \sin(2x))$$

(5) **Division par x** : Ecrire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\frac{\sin(x)}{x}$.

(6) **Composition de développements limités** : Ecrire les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$\ln(1 + \sin(x))$$

$$\ln(\cos(x))$$

$$e^{2\ln(1+x)}$$

$$\ln(3 + \sin(x))$$

$$e^{\sqrt{1+x}}$$

$$e^{\cos(x)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin(\pi + x)$$

(7) **Quotient de développements limités** : Ecrire les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$\frac{1}{x^3+x+1}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^3+x+1}$$

$$\frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x$$

(8) **Intégration d'un développement limité** : Ecrire les DL à l'ordre général au voisinage de 0 de :

$$\frac{1}{1+x}$$

$$\ln(1+x)$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan(x)$$

(9) **DL au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$** : Ecrire les DL à l'ordre général au voisinage de x_0 de :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} : \cos(x)$$

$$x_0 = \pi : \sin(x)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} : \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

(10) **DL au voisinage de $+\infty$** : Ecrire les DL à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de :

$$\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

$$x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$\Rightarrow \Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants** : Exo I p 201, Exo 4 p 239, Exo 5 p 241.

4. APPLICATIONS DES DL :

- (1)
- Calcul de limites**
- : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 + 2 \ln(\cos x)}{x^2(1 - \cos 2x)}$$

$\Rightarrow \Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants** : Exo V p 212, Exo I p 216, Exo I.1 p 218, Exo 2.1 p 228, Exo 1 p 234.

- (2)
- Comparaison avec la formule de Taylor pour calculer la valeur des dérivées d'une fonction en un point.**
- Écrire la formule de Taylor générale d'une fonction
- f
- à l'ordre
- n
- entre
- x_0
- et
- x
- (Attention aux factorielles !!!)

En utilisant le DL de $\cos x$ en $\pi/2$, retrouver la valeur des dérivées successives de la fonction cosinus en $\pi/2$.

En utilisant le DL de $\arctan x$ en 0, calculer $\arctan^{(2n+1)}(0)$ et $\arctan^{(2n)}(0)$.

- (3)
- Continuité, dérivabilité**
- : Soit la fonction
- f
- définie par :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ? f admet-elle un DL à l'ordre 2 en 0 ? À l'ordre 3 ? Que vaut f' ? f' possède-t-elle un DL à l'ordre 1 en 0 ?

$\Rightarrow \Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants** : Exo 1 p 240, Exo I p 212, Exo 2 p 234, Exo 3 p 244, Exo 1 p 246.

- (4)
- Equation de la tangente en un point et position de la courbe par rapport à la tangente**
- :

Quelle est l'équation de la tangente à $f(x) = \ln(1+x)$ en $x=0$ et la position de la tangente par rapport au graphe de f ?

Quelle est l'équation de la tangente à $f(x) = \sin x$ en $x=0$ et la position de la tangente par rapport au graphe de f ?

$\Rightarrow \Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants** : Exo I p 212, Exo III p 218, Exo 3 p 228, Exo 3 p 246.

- (5)
- Equation des asymptotes en $\pm\infty$**
- : En utilisant le DL à l'ordre 3 au voisinage de
- $+\infty$
- de
- $\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$
- , donner l'équation de l'asymptote en
- $+\infty$
- de la fonction
- $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$
- , ainsi que la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Même question en
- $-\infty$
- .

$\Rightarrow \Rightarrow$ **Exo de partiels correspondants** : Exo 4 p 240, Exo 3 p 234, Exo I p 205, Exo III p 212, Exo I.2 p 218, Exo 2.2 p 228, Exo 4 p 246.