Université Lille I Année 2008-2009
S2 PC, M104 **Devoir maison**

Algèbre linéaire

Exercice 1. Soit λ un nombre réel. On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Montrer que ϕ est une application linéaire, et en donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ x+2y-z \\ -x+y+4z \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b. Déterminer le noyau et l'image de A. A est-elle injective, surjective, bijective ?
c. Déterminer les valeurs propres de A, ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.
d. A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Application. On considère les suites récurrentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par les relations

$$\left\{\begin{array}{rr} u_0 = & -1 \\ v_0 = & 2 \\ w_0 = & -1 \end{array}\right. , \quad \forall n\in\mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & u_n & +2v_n & +2w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & +2v_n & -w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & +v_n & +4w_n \end{array}\right.$$

a. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Justifier que l'énoncé précédent s'écrit matriciellement sous la forme

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n,$$

où A est la matrice trouvée en **1.a.**.
b. En déduire que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0.$$

c. Exprimer le vecteur X_0 dans la base de vecteurs propres trouvée en **1.d.**.
d. Déduire de la question précédente une façon simple de calculer $A^n X_0$, et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de X_n en fonction de n, puis les valeurs de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Correction : Algèbre linéaire

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} \phi(u+\alpha v) = \phi \begin{pmatrix} x_1+\alpha x_2 \\ y_1+\alpha y_2 \\ z_1+\alpha z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1+\alpha x_2 + y_1 + \alpha y_2 + z_1 + \alpha z_2 \\ x_1 + \alpha x_2 - y_1 - \alpha y_2 \\ \lambda(z_1+\alpha z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ x_1-y_1 \\ \lambda z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2 \\ x_2-y_2 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix} \\ &= \phi(u)+\alpha\phi(v), \end{aligned}$$

Ce qui montre la linéarité de ϕ.
La matrice A de ϕ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

elle est obtenue en écrivant en colonne les vecteurs $\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons l'injectivité de ϕ. D'après la caractérisation du cours, ϕ est injective si et seulement si $\ker(\phi) = \{0\}$. On peut calculer le noyau de ϕ en utilisant la méthode du cours, c'est un simple calcul (à faire). Mais aussi, on peut remarquer la chose suivante : d'après le théorème du rang, on a l'égalité $3 = \dim(\ker(\phi)) + \mathrm{rg}(\phi)$. Donc, si ϕ est injective, nécéssairement, $\mathrm{rg}(\phi) = 3$, et alors ϕ est aussi surjective. Inversement, si ϕ est surjective, $\mathrm{rg}(\phi) = 3$, et donc $\ker(\phi) = \{0\}$, et ϕ est injective. On a donc montré l'équivalence ϕ injective $\Leftrightarrow$ ϕ surjective $\Leftrightarrow$ ϕ bijective. Il suffit donc maintenant de vérifier si ϕ est bijective, c'est-à-dire si A est inversible. Or, une matrice (carrée) est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Ici on calcule $\det(A) = -2\lambda$. Donc $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Ainsi on a montré que ϕ est injective si et seulement si $\lambda \neq 0$.
Pour la surjectivité, la démonstration précédente montre que ϕ est injective si et seulement si ϕ est surjective, on en déduit que ϕ est surjective si et seulement si $\lambda \neq 0$.

Exercice 2. 3. a. La linéarité se prouve comme dans l'exercice précédent. La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b. On applique la technique apprise dans le cours. On part de la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

on applique l'algorithme du pivot de Gauss *aux colonnes* de la matrice, et on obtient après les opérations successives $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$ et $C_2 \leftrightarrow C_1$, la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

D'après le cours, cela signifie que $\ker(A) = \{0\}$ et que $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$. En particulier, A est injective, surjective, et donc bijective.
On peut traiter cette question plus rapidement encore, en calculant le déterminant de A, qui est une matrice carrée. On trouve $\det(A) = 1*2*4+2*(-1)*(-1)+1*1*2-2*2*(-1)-1*1*(-1)-4*2*1 = 9 \neq 0$, d'où l'on déduit que A est inversible (i.e. bijective), et donc en particulier injective et surjective.
c. Pour chercher les valeurs propres de A, on va d'abord déterminer son polynôme caractéristique. On calcule

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -X^3 + 7X^2 - 15X + 9 = -(X-1)(X-3)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 3.
Cherchons maintenant une base propre des sous-espaces propres associés.
Pour la valeur propre 1, l'espace propre associé est

$$\ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer une base de cet espace, on peut appliquer la même méthode que pour la question précédente, ou encore on peut résoudre le système associé (faîtes-le). On peut aussi utiliser le fait qu'un sous espace-propre est de dimension $\geqslant 1$, et que sa dimension est plus petite que la multiplicité de la racine correspondante dans le polynôme caractéristique. Ici, la multiplicité de 1 est 1, donc on en déduit que la dimension du sous-espace propre est 1, et il suffit alors de trouver un vecteur dans cet espace pour en avoir une base. On vérifie aisément que le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à cet espace. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc la droite vectorielle $\mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour la valeur propre 3, l'espace propre associé est

$$\ker(A - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette fois-ci l'argument sur les dimensions est insuffisant, la dimension de cet espace peut être 1 (minimum possible dans tous les cas) ou 2 (racine de multiplicité 2 du polynôme caractéristique). il faut donc résoudre le système associé (ou utiliser la technique de la question précédente), ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{cccc} -2x & +2y & +2z & = 0 \\ x & -y & -z & = 0 \\ -x & 2y & +z & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & -y & -z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont donc déterminées par deux paramètres (par exemple y et z) et sont de la forme $\begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$. L'espace propre associé à 3 est donc de dimension 2 (deux paramètres

indépendants), et une base de cet espace est par exemple $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, obtenue pour les valeurs $(y = 1, z = 0)$ et $(y = 0, z = 1)$ respectivement.
d. D'après un théorème du cours, A est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la racine correspondante dans le polynôme caractéristique. En l'occurence, 1 est racine de P_A avec multiplicité 1 et le sous-espace propre associé est de dimension 1, et 3 est racine de P_A avec multiplicité 2 et le sous-espace propre associé est de dimension 2, on en déduit que A est diagonalisable.
Une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres est donc donnée par la famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ (i.e. la matrice dont les colonnes sont données, dans l'ordre, par les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique), et D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

on a la relation $A = PDP^{-1}$. Nous avons donc diagonalisé la matrice A.
4. a. C'est une simple vérification que $\forall n \in \mathbb{N}, AX_n = X_{n+1}$ à partir du produit matriciel.
b. On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ (par convention), et donc $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$, donc le résultat est vrai à l'ordre 0. On suppose le résultat acquis jusqu'à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}$. On applique la définition, $X_{n+1} = AX_n$, puis on utilise l'hypothèse de récurrence, $X_n = A^n X_0$, d'où l'on déduit que $X_{n+1} = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$. On a donc établi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
c. On remarque que

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d. On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n X_0 = A^n \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or, comme on a ici des vecteurs propres, on a que

$$A^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n - 2 \\ 3^n + 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en regardant chaque coordonnée, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3^n - 2, \qquad v_n = 3^n + 1, \qquad w_n = -1.$$