EXERCICES SUR LES ENSEMBLES

FRAN COIS COTTET-EMARD

Pour toute partie A d'un ensemble E, on note par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Si A et B sont deux parties d'un même ensemble, on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Rappelons que pour démontrer une égalité d'ensembles $A = B$, on doit montrer les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

1 – On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 - 1\}$ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1 - x^2\}$.

a - Représenter A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$. Ecrire chacun de ces ensembles sous la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dots\}$.

b - D'une façon générale, si A et B sont des parties d'un ensemble quelconque E, exprimer les ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$ à l'aide de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2 – a - Représenter graphiquement l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^2 + y^2 \leq 9 \text{ et } (x + y > 3 \text{ ou } xy < 2).$$

b - Exprimer l'ensemble précédent à l'aide des opérateurs $\cap$, $\cup$ appliqués à trois parties A, B, C de $\mathbb{R}^2$ que l'on définira à partir des données de la question (a).

c - Soient plus généralement A, B, C trois parties d'un même ensemble quelconque. Montrer que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{et} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d - Retrouver le résultat de la question (a) à l'aide de (c).

3 – Soient A et B deux parties d'un ensemble quelconque E. Déterminer les deux sous-ensembles suivants de E :

$$X = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \qquad Y = (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup B)$$

4 – Soient A et B deux parties d'un ensemble quelconque E. Montrer que

$$A \setminus A \cap B \;=\; A \cup B \;\setminus B \qquad \text{et} \qquad A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup B$$

5 $-$ Soit $A = \{a, b\}$ un sous-ensemble à deux éléments de $\mathbb{R}$. Dire, en le justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

(i)$\{a\} \in A$	(ii) $a \in A$	(iii) $\emptyset \in A$
(iv) $\{a\} \in \wp(A)$	(v) $\emptyset \in \wp(A)$	(vi) $b \in \wp(A)$

6 $-$ Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

a - Montrer que $A \cup B \subset A \cup C$ n'implique pas que $B \subset C$.

b - A-t-on l'équivalence $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \iff B \subset C$?

7 $-$ Soit E l'ensemble des voyageurs attendant dans une salle d'embarquement d'un aéroport quelconque (mais sérieux) et F l'ensemble des numéros de place de l'avion qu'ils vont prendre ; on note f l'application de E dans F qui à un voyageur associe son numéro de place.

a - Quelle propriété présente f dans tous les cas ?

b - Sachant que l'avion n'est pas plein, que dire de f ?

c - Que signifie f est bijective ?

8 $-$ Soit P l'ensemble des pièces d'or contenues dans un sac que le seigneur du château local jette à la volée à l'ensemble M des manants réunis sous son balcon à Noël 1345. On appelle f l'application de P dans M qui à une pièce associe celui qui la ramasse (après bagarre ou non, peu importe).

a - dans quel cas f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

b - en comparant le nombre de pièces et le nombre de manants, donner une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que f soit injective ; idem pour surjective ; idem pour bijective.

9 $-$ Soient A et B deux parties d'un ensemble E et f une application de E dans un ensemble F.

a - Montrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b - montrer que si f est injective, $f(A) \subset f(B) \implies A \subset B$. Montrer que si f n'est pas injective, il existe des parties A et B de E telles que $f(A) \subset f(B)$ mais $A \not\subset B$.

10 $-$ On considère l'application f de $\mathbb{N}$ dans lui-même définie par $f(n) = 3n^2 - n + 7$.

a - Justifier l'existence de cette application.

b - Etudier si f est ou non injective ; puis surjective.

11 $-$ On considère l'application g de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie pat $g(n) = n^2 - 2n + 2$.

a - Justifier l'existence de cette application.

b - Etudier si g est ou non injective ; puis surjective.

12 – a - On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x+y$. Cette application est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

b - Soit a un réel quelconque : trouver $f^{-1}(\{a\})$. Trouver de même $f^{-1}([0,1[)$. Dans chaque cas, dessiner cet ensemble.

c - Reprendre les mêmes questions avec $g(x,y) = x^2 + y^2$.