# EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
## M104 filière PC

*Aucun document n'est autorisé : ni notes de cours, ni calculatrice, ni téléphone portable. La durée de l'examen est de 2h.*

**Questions de cours (5 points) :**

1. Donner la définition d'un groupe.
2. Donner un exemple de groupe.
3. Donner la définition d'une application injective.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de $A$ ? **Justifier votre réponse !**
   (b) Le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il au noyau de $A$ ? **Justifier votre réponse !**
   (c) Le vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient-il au noyau de $A$ ? **Justifier votre réponse !**
   (d) La matrice $A$ est-elle inversible ? **Justifier votre réponse !**

**Problème (10 points)** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ est $A$ ?
2. Calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I$, où $I$ est la matrice identité de taille $(3, 3)$ et où $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelles sont les racines du polynôme obtenu ? On les notera $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$.
3. Pour chaque $\lambda_i$ (avec $i = 1, 2$ ou $3$), trouver un vecteur non nul $\vec{v}_i$ tel que $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.
4. Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de $f$ dans cette base ? On la notera $D$.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}$.
6. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. Après avoir donné $D^n$, calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 1 (3 points)**
Résoudre, suivant la valeur de $a$, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & ay & = & 3a \\ ax & + & y & = & -3a \end{array}\right.$$

**Exercice 2 (2 points)**

1. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\ker B$.

2. Soit $B_n$ la matrice de taille $(n, n)$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 (ainsi $B_3 = B$). Donner la dimension et une base de l'image de $B_n$.