Université Lille I Année 2009

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
M104 filière PC

Questions de cours (5 points) :

1. Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star\ : G \times G \to G$ est un groupe lorsque :
   – $\star$ est associative, i.e. $\forall x, y, z \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$;
   – il existe un élément neutre $e \in G$ (e vérifie $\forall x \in G$, $e \star x = x \star e = x$) ;
   – tout élément $x \in G$ admet un inverse ($\forall x \in G, \exists\, y \in G$, $x \star y = y \star x = e$).
2. L'ensemble des permutation de $\{1, \ldots, n\}$ muni de la composition des applications est un exemple de groupe.
3. Une application $f\ : E \to F$ est injective lorsque $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
   Pour une application **linéaire**, il y a équivalence entre
   $$f \text{ injective} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}.$$
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) Le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A, car son image est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les composantes apparaissent dans la 4ème colonne de A, et ces composantes sont toutes nulles.
   (c) Le vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A, car les première et troisième colonnes de la matrice A sont égales.
   (d) La matrice A ne peut-etre inversible, car elle n'est pas carrée.

Problème Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. **(1 point)** L'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ est A est

$$f \ : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ y - 4z \\ -z \end{pmatrix}. \end{array}$$

2. **(1 point)** On a

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda).$$

Les racines du polynôme obtenu sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

3. **(2 points au total)**

Pour $\lambda_1 = 2$, le vecteur $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$. **(0,5 point)**

Pour $\lambda_2 = 1$, on a

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

ainsi le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$. **(0,5 point)**

Pour $\lambda_3 = -1$,

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_3 I \\ \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow 3C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow 3C_3 + C_1}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi le vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie $A\vec{v}_3 = \lambda_3 \vec{v}_3$. **(1 point)**

4. **(1 point)** Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres dictinctes de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. On peut également calculer

$$\det\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

donc les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. **(2 points)** On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'inverse de P est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. **(2 points)** Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   - Initialisation : pour $n = 1$, on peut invoquer le fait que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \frac{1}{3}\vec{v}_3\}$, donc on a la relation $D = P^{-1}AP$ qui est équivalente (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}) à $A = PDP^{-1}$. On peut également effectuer le produit de matrice PDP^{-1} et ainsi montrer que l'on obtient bien A.
   - Hérédité : supposons que pour un entier donné k, $A^k = PD^kP^{-1}$. Alors

   $$A^{k+1} = A^kA = PD^kP^{-1}A$$

   d'après l'hypothèse de récurrence. Comme nous avons déjà montré que $A = PDP^{-1}$, on a

   $$A^{k+1} = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^kIDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

   où on a utilisé que PP^{-1} est égal à la matrice identité I et $DI = D$.
   - La relation $A^n = PD^nP^{-1}$ étant satisfaite pour $n = 1$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

7. **(1 point)** On a

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n + 1 & 2^n - 2 + (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 + 2(-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

Le déterminant de la matrice des coefficients du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & ay & = & 3a \\ ax & + & y & = & -3a \end{array} \right.$$

est

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2.$$

– **(1 point)** Pour $a \notin \{1, -1\}$, le système admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3a & a \\ -3a & 1 \end{vmatrix}}{1-a^2} = \frac{3a+3a^2}{1-a^2}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3a \\ a & 3a \end{vmatrix}}{1-a^2} = \frac{3a+3a^2}{1-a^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a+3a^2}{1-a^2} \\ \\ \frac{3a+3a^2}{1-a^2} \end{pmatrix}.$$

– **(1 point)** Pour $a = 1$, le système devient

$$\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ x & + & y & = & -3 \end{cases}$$

Ce système est impossible (n'admet pas de solutions).

– **(1 point)** Pour $a = -1$, le système devient

$$\begin{cases} x & - & y & = & -3 \\ -x & + & y & = & +3 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = -3$$

Ce système admet une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x + 3$.

Exercice 2 (2 points)

1. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Une base de ker B est donnée par $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. L'image de B_n est de dimension 1, engendrée par le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.