Solution de la séance d'exercices 10 : Séparabilité des L^p

Exercice 1 Voir le lemme 2.17 p 61 dans *Analysis* de Lieb et Loss.

Exercice 2

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que
   (a) Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
   (b) $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
   (c) I n'est pas dénombrable.
   Supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Grâce à (a), pour chaque $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. On choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. On a $n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ donc $i = j$ par (b). Ainsi l'application $i \mapsto n(i)$ est injective. Par suite I est dénombrable ce qui contredit (c).
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(a,1)}$ où $\mathcal{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Soit la famille
   $$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$
   où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ n'est pas dénombrable, donc (c) est vérifié. L'ensemble O_a est la boule ouverte de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en f_a. En particulier (a) est vérifié. Remarquons que lorsque $a \neq b$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe $f \in O_a \cap O_b$ avec $a \neq b$. Alors
   $$\|f_a - f_b\|_\infty \leq \|f_a - f\|_\infty + \|f - f_b\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$
   ce qui n'est pas possible. Donc (b) est vérifié. On en conclut que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.