

Séance d'exercices 11 : Théorème de Radon-Nikodym, fonction Bêta

le 16 janvier 2007

Definition 1 Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesuré (Ω, Σ) . On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\nu \ll \mu$ si

$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$

pour tout $S \in \Sigma$.

Théorème 1 Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesuré (Ω, Σ) . Si ν est absolument continue par rapport à μ , alors il existe une fonction positive $h \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction positive mesurable F on a :

$$\int_{\Omega} F(x) d\nu(x) = \int_{\Omega} F(x)h(x) d\mu(x). \quad (1)$$

Exercice 1 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 1.

1. Posons

$$\alpha = \mu + 2\nu, \quad \omega = 2\mu + \nu.$$

On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure α et l'application linéaire $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par :

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} f(x) d\omega(x).$$

Montrer que $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ est une application linéaire continue.

2. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega, \alpha)$:

$$\int_{\Omega} f(2g - 1) d\nu = \int_{\Omega} f(2 - g) d\mu.$$

3. Montrer que les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ vérifient $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. En déduire que l'ensemble $Z = \{x \in X : g(x) = \frac{1}{2}\}$ est de μ -mesure 0.

4. Montrer que la fonction

$$h(x) = \frac{2 - g(x)}{2g(x) - 1}$$

est bien défini, appartient à $L^1(\Omega, \mu)$ et satisfait (1).

Exercice 2 1. On définit la fonction Bêta par $B(a, b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, montrer que

$$B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2 \int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1} dr$$

2. Démontrer que $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha} dx$ en fonction de la fonction Bêta.