Solution de la séance d'exercices 11 : Théorème de Radon-Nikodym, fonction Bêta

Exercice 1 cf M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, graduate studies in mathematics, vol. 76, AMS, 2001, pages 50–51.

- Les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ sont introduits pour montrer que les ensembles $\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$ et $\{x \in \Omega, g(x) > 2\}$ sont de μ-mesure nulle (voir plus bas). En conséquence, la fonction $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ peut être choisie telle que $\frac{1}{2} \leq g \leq 2$. (On rappelle que $L^2(\Omega, \alpha)$ désigne l'ensemble des fonctions de carré-intégrables définies modulo les ensembles de mesure nulle.) Cela implique que la fonction h définie dans la question 3 est positive comme quotient de deux fonctions positives.
- Pour montrer que $\mu\left(\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}\right) = 0$, on peut utiliser par exemple la continuité de la mesure : on a $S_{11} \subset S_{12} \subset S_{13} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l} = \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$, ainsi
$$\mu\left(\left\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\right\}\right) = \mu\left(\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l}\right) = \lim_{l\to+\infty} \mu\left(S_{1l}\right) = 0.$$
De même, $S_{21} \subset S_{22} \subset S_{23} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{2l} = \{x \in \Omega, g > 2\}$, d'où $\mu\left(\{x \in \Omega, g > 2\}\right) = 0$.
- Pour montrer que l'on a l'égalité (1) du théorème pour toute fonction positive mesurable, on utilise le fait que les fonctions essentiellement bornées appartiennent à $L^2(\Omega, \alpha)$ (pour une mesure finie on a en effet $L^\infty(\Omega, \alpha) \subset L^2(\Omega, \alpha)$), donc l'égalité
$$\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu = \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.$$
de la question 2 est en particulier vérifiée pour toute fonction mesurable positive bornée. Soit maintenant une fonction f mesurable positive (non nécessairement bornée). Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $f_n = f\, \mathbb{1}_{\{f\leq n\}}$ donne :
$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\,\nu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(2g-1)\, d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(2-g)\, d\mu \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2-g)\, d\mu \\
&= \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.
\end{aligned}$$
On en déduit que l'égalité (1) du théorème est vérifiée pour toute fonction F de la forme $F = f(2g-1)$, où $f \in \mathcal{M}^+$. Puisque $(2g-1) > 0$, l'ensemble des fonctions F de cette forme est également $\mathcal{M}^+$.

Exercice 2

1. On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, montrons que
$$B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1} dr$$
En utilisant le changement de variable $1 - r^2 \to s$, on a
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1} dr &= -\frac{1}{2}\int_1^0 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m-2}{2}} ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m}{2}-1} ds = \frac{1}{2} B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right).
\end{aligned}$$

2. Par le changement de variables $t \to t^2$ et $u \to u^2$ on a
$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u} u^{b-1}\, du\right) \\
&= 4\left(\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2a-1}\, dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2b-1}\, du\right)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'intégration en polaires on a

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)}t^{2a-1}u^{2b-1}\,dt\,du\\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2a-1}r^{2b-1}r\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi\right).\end{aligned}$$

Or, par le changement de variable $r^2 \to r$,

$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(a+b)-1}\,dr = \int_0^\infty e^{-r}r^{a+b-1}\,dr = \Gamma(a+b);$$

et par le changement de variable $u = \cos^2\varphi$,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = B(a,b).$$

Les trois dernières identités entraînent

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\,dx &= \int_0^{+\infty}\mu\left(\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha}>t\right)\,dt = \int_0^1 \mathrm{Vol}\left(\mathcal{B}\left(0,\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\,dt\\ &= \mathcal{V}_n\int_0^1\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{n}{2}}\,dt = \mathcal{V}_n\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2\alpha}}\,dt\\ &= \alpha\mathcal{V}_n\int_0^1(1-s)^{\frac{n}{2}}s^{\alpha-\frac{n}{2}-1}\,ds = \alpha\mathcal{V}_n B\left(\alpha-\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right).\end{aligned}$$