Séance d'exercices 12 : Théorème de Newton, Réarrangement à symétrie sphérique

le 23 janvier 2007

Exercice 1 (Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$) Soit Ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\Omega' = \{(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < r, 0 < \theta_1, \dots, \theta_{n-2} < \pi, 0 < \theta_{n-1} < 2\pi\}.$$

Soit l'application S de Ω' dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1,\\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\cos\theta_{n-2}\\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées cartésiennes de $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geq 0\ \}$. Montrer que Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est de mesure nulle, et que S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.

(b) Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})\,r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\,dr\,d\theta_1\dots d\theta_{n-1}\\
&= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})\,r^{n-1}\,dr\,d\sigma,
\end{aligned}$$

où $d\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

(c) En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume $\mathcal{V}_4$ de la boule unité de $\mathbb{R}^4$ et l'aire $\mathcal{A}_3$ de la sphère unité $\mathcal{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 (Théorème de Newton) Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$, où $|x|$ désigne la norme de x dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que pour $r = |x|$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x-y|}\,dy = 4\pi\frac{1}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

(b) Que peut-on en déduire pour une distribution de masse $f(x) = g(|x|)$ lorsque g est à support dans $[0, R]$?

Exercice 3 Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ et $r = |x|$. On considère $f\ : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

(a) Calculer pour $d = 1$ le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.

(b) Même question pour $d = 2$.

(c) Calculer $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$ puis $d = 2$.

Exercice 4 Soit $f\ : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Calculer le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.