Solution de la séance d'exercices 12 : Théorème de Newton, Réarrangement à symétrie sphérique

Exercice 1 (Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$) (a) Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geq 0\ \}$. Comme $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$, l'image de Ω' par S est incluse dans Ω. Réciproquement, soit x un élément de Ω. Posons $r = |x|$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, on peut définir par récurrence $\theta_i \in (0, \pi)$ grâce à son cosinus :

$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{i-1}}.$$

Quant à θ_{n-1}, il est déterminé par son sinus et son cosinus. Comme $x_n \neq 0$ ou $x_{n-1} < 0$, nécessairement $\theta_{n-1} \neq 0$(modulo 2π).

L'application S est continûment différentiable, car chacune de ses composantes l'est. La matrice jacobienne a ses vecteurs colonnes orthogonaux, et de norme respectivement 1, $r, r\sin\theta_1, \ldots, r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2}$. Son déterminant vaut alors $r^{n-1}\left(\sin\theta_1\right)^{n-2} \ldots \sin\theta_{n-2}$. Comme ce déterminant ne s'annule jamais, S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.

(b) C'est la formule du changement de variable.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_4 &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\
&= 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta_1 d\theta_1\right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta_2 d\theta_2\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta_1}{2} d\theta_1\right) \left[-\cos\theta_2\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{2}. \\
\mathcal{A}_3 &= \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\
&= 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Théorème de Newton) Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$.

(a) Posons

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(|y|)}{|x-y|} \, dy,$$

et $r = |x|$, $s = |y|$. Alors $|x - y| = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}$ où θ est l'angle entre l'axe (Ox) et l'axe (Oy). On considére les coordonnées sphériques de centre O et d'axe (Ox) suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= s\cos\theta \\
y_2 &= s\sin\theta\cos\varphi \\
y_3 &= s\sin\theta\sin\varphi
\end{aligned}$$

On a

$$I = \int_{s=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(s)}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}} s^2 \sin\theta \, ds d\theta d\varphi.$$

On note que

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{rs} \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{rs}\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\pi} g(s) s^2 \, ds \\
&= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{rs} \left(\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2}\right) g(s) s^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Lorsque $s \leq r$, on a

$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s) - (r-s) = 2s,$$

et lorsque $s > r$, il vient

$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s) - (s-r) = 2r.$$

On en déduit alors :

$$I = \frac{4\pi}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

(b) Lorsque g est à support dans $[0,R]$, le potentiel newtonien créé par la distribution de masse $f(y) = g(|y|)$ en un point $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $|x| > R$, est identique au potentiel créé par une masse totale égale concentrée à l'origine.

Exercice 3 Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ et $r = |x|$. On considère $f\ : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

(a) La fonction h atteint son maximum en $r = 1$ et $h(1) = \frac{1}{4}$. Pour un réel positif $t \leq \frac{1}{4}$ donné, on cherche à résoudre $t = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}$. On obtient deux solutions

$$\begin{aligned} r_+ &= \left(\tfrac{1-2t}{2t} + \tfrac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ r_- &= \left(\tfrac{1-2t}{2t} - \tfrac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi $\mu\,(f > t) = \mathcal{V}_d\left(r_+^d - r_-^d\right)$. De plus, par définition, f^* vérifie $\mu\,(f^* > t) = \mu\,(f > t)$ et $\mu\,(f^* > t) = \mathcal{V}_d\, r^d$ où r et t sont liés par $t = f^*(r)$. Pour $d = 1$, on a donc $r = r_+ - r_-$ et t est donné par :

$$\begin{aligned} r^2 &= r_+^2 + r_-^2 - 2r_+r_- = \tfrac{1-2t}{t} - 2\sqrt{\tfrac{(1-2t)^2}{4t^2} - \tfrac{1-4t}{4t^2}} \\ &= \tfrac{1-4t}{t}. \end{aligned}$$

Il en découle que $t = f^*(r) = (4+r^2)^{-1}$.

(b) Pour $d = 2$, on a

$$r^2 = r_+^2 - r_-^2 = \frac{\sqrt{1-4t}}{t},$$

ce qui implique que

$$t = f^*(r) = r^{-4}\left(\sqrt{4+r^4} - 2\right).$$

(c) Calculons $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f^*\|_2^2 \\ &= 2\textstyle\int_0^{+\infty}(4+r^2)^{-2}\,dr \\ &= \tfrac{1}{4}\textstyle\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-2}\,ds \\ &= \tfrac{1}{8}\textstyle\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = \tfrac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 2.3 de la série 11, car :

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = 2\mathcal{V}_1 B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 4\frac{\Gamma(3/2)^2}{\Gamma(3)} = 4\frac{(1/2\Gamma(1/2))^2}{2!} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $d = 2$, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)^2\,dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} h(r)^2\,rdrd\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} r^5(1+r^2)^{-4}\,dr = \frac{\pi}{3},$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 2.3 de la série 11, car :

$$\int_{\mathbb{R}^6}(1+|x|^2)^{-4}\,dx = 4\mathcal{V}_6 B\left(4-\frac{6}{2},\frac{6}{2}+1\right) = 4\mathcal{V}_6 B\,(1,4)\,,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^6} (1+|x|^2)^{-4}\, dx = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{S}^5} (1+r^2)^{-4}\, r^5\, dr d\sigma = \mathcal{A}_5 \int_0^{+\infty} (1+r^2)^{-4}\, r^5\, dr$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} (1+r^2)^{-4}\, r^5\, dr \quad = \quad 4\tfrac{\mathcal{V}_6}{\mathcal{A}_5} B\,(1,4) = \tfrac{4}{6}\tfrac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5)}, = \tfrac{2}{3}\tfrac{3!}{4!} = \tfrac{1}{6}$$

Exercice 4 Soit $f \ : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Par translation, le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f est donné par

$$f^*(x) = e^{\frac{a^2}{4}} e^{-x^2}.$$