Séance d'exercices 13 : Théorème de Plancherel et transformée de Fourier d'une fonction radiale

le 30 janvier 2007

Definition 1 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i(y,x)}\, dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1 (Théorème de Plancherel) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Exercice 1 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. Montrer que la fonction $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2\, e^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x) f(y) e^{2\pi i(k,x-y)} e^{-\varepsilon\pi|k|^2}\, dxdydk.$$
4. Sachant que la transformée de Fourier de la gaussienne $h_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$) est donnée par $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x) f(y)\, dxdy.$$
5. Soit $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions définies par :
$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x)\, dx.$$
Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε lorsque ε tend vers 0 ?
6. Montrer que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon) f(y)\, dy.$$
7. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\, dk = \|\hat{f}\|_2^2$.
8. En déduire que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction radiale, i.e. telle que $f(x) = h(r)$ où $r = |x|$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f s'écrit :

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{|k|} \int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi|k|r)\, dr.$$