Solution de la séance d'exercices 13 : Théorème de Plancherel et transformée de Fourier d'une fonction radiale

Exercice 1 cf *Lieb and Loss* page 118. (Pour la question 6, on peut utiliser la continuité du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Exercice 2 Soit $f\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction radiale, i.e. telle que $f(x) = h(r)$ où $r = |x|$ et $h\ :\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-2\pi i(x,k)}\,dx \\
&= \\
&= \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} h(r)e^{-2\pi ir|k|\cos\theta}r^2\sin\theta\,d\theta dr d\varphi \\
&= \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} h(r)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\pi ir|k|}e^{-2\pi ir|k|\cos\theta}\right)r^2\,d\theta dr \\
&= \\
&= \frac{1}{|k|}\int_0^{\infty} h(r)r\frac{1}{i}\left[e^{+2\pi ir|k|} - e^{-2\pi ir|k|}\right]\,dr \\
&= \\
&= \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r)r\sin(2\pi|k|r)\,dr.
\end{aligned}$$