Séance d'exercices 14 : Continuité des translations, Convolution, Transformée de Fourier de $|x|^{\alpha-n}$

le 6 février 2007

Definition 1 Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h, noté τ_h, agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) := f(x-h), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1 *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.*

Théorème 2 *Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :*
(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n = 1$
(ii) il existe une constante $K > 0$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\, dx \leq K$
(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|>\varepsilon} |\varphi_n(x)|\, dx = 0$.
Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Exercice 1 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 1. Soit $1 \leq p < +\infty$.

1. Montrer que si f est continue à support compact dans la boule $\mathcal{B}(0, M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h| \leq 1$, alors
$$|f(x-h) - f(x)|^p \leq \mathbb{1}_{B(0,M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p.$$
où $\mathcal{B}(0, M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.
2. En déduire que pour f continue à support compact, on a
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
3. Démontrer le théorème pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.
4. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 2 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 2. Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème 2, et soit $1 \leq p < +\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), et en utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\, dx$, montrer que
$$|\varphi_n * f - f|^p(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\, dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\varphi_n|(y)\, dy\right).$$
2. En déduire que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\, dy.$$
3. Soit $\delta > 0$, montrer que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\, dy\right).$$
4. En déduire le théorème 2.

Exercice 3 Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \alpha < n$. Posons $c_\alpha := \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$. En utilisant l'identité

$$c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\pi|k|^2\lambda}\,\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda,$$

montrer que

$$c_\alpha \left(|k|^{-\alpha}\hat{f}(k)\right)^\vee(x) = c_{n-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)dy,$$

où la notation $h^\vee$ désigne la transformée de Fourier inverse d'une fonction h donnée par $h^\vee(x) := \hat{h}(-x)$.