Solution de la séance d'exercices 14 : Continuité des translations, Convolution, Transformée de Fourier de $|x|^{\alpha-n}$

Definition 1 Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h, noté τ_h, agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) := f(x-h), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1 *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \le p < +\infty$, alors $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.*

Théorème 2 *Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :*
(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n = 1$
(ii) il existe une constante $K > 0$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx \le K$
(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|>\varepsilon} |\varphi_n(x)|\,dx = 0$.
Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Exercice 1 Soit $1 \le p < +\infty$.

1. Si f est continue à support compact dans la boule $\mathcal{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h| \le 1$, alors
$$|f(x-h) - f(x)|^p \le (|f(x-h)| + |f(x)|)^p \le \left(2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,M+1)}\right)^p = \mathbb{1}_{B(0,M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p.$$
où $\mathcal{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.
2. Pour f continue, on a $\lim_{h\to 0} |f(x-h) - f(x)| = 0$. Puisque la fonction $g(x) = 2^p\|f\|_\infty^p \mathbb{1}_{B(0,M+1)}(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale, et il vient :
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p^p = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} |f(x-h) - f(x)|^p\,dx = 0.$$
3. Soit f une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f - f_\varepsilon\|_p \le \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi :
$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p &= \|\tau_h(f - f_\varepsilon) - (f - f_\varepsilon) + \tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\le \|\tau_h(f - f_\varepsilon)\|_p + \|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &= 2\|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &= \tfrac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$
Puisque f_ε est continue à support compact, d'après la question précédente, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$, $\|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour $|h| < \delta$, on a $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$. En d'autre termes $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.
4. Pour $p = \infty$, les fonctions continues à support compact ne sont pas denses dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui fait que la démonstration précédente ne peut pas s'appliquer dans ce cas. De plus, on vérifie que, pour $f = \mathbb{1}_{B(0,1)}$ et $h \ne 0$, on a
$$\|\tau_h f - f\|_\infty = 1.$$
Alors que pour $h = 0$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 0$. On peut également vérifier que $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0$ si et seulement si la fonction f possède un représentant uniformément continu.

Exercice 2 Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème 2, et soit $1 \le p < +\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), on a

$$\begin{array}{rcl} |\varphi_n * f - f|^p(x) & = & |\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_n(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_n(y)\,dy|^p \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)||\varphi_n(y)|\,dy\right)^p. \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\,dx$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\varphi_n * f - f|^p(x) & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1^q\,d\nu(y)\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p\,d\nu(y)\right)^{\frac{p}{p}} \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right) \\ & \leq & K^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right). \end{array}$$

2. On en déduit que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{y\in\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right) dx$$

D'après le théorème de Tonelli :

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi_n * f - f\|_p^p & \leq & K^{\frac{p}{q}} \int_{y\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right) |\varphi_n|(y)\,dy \\ & \leq & K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\,dy. \end{array}$$

3. Soit $\delta > 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi_n * f - f\|_p^p & \leq & K^{\frac{p}{q}} \left(\int_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\,dy\right) \\ & \leq & K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p \int_{|y|\leq\delta} |\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta} (\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)^p\, |\varphi_n(y)|\,dy\right) \\ & \leq & K^{\frac{p}{q}} \left(K \sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + (2\|f\|_p)^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy\right) \\ & \leq & K^{\frac{p}{q}} \left(K \sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p\|f\|_p^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy\right). \end{array}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cf l'exercice précédent), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|y| \leq \delta \quad \Rightarrow \|\tau_y f - f\|_p^p < \frac{K^{-\left(\frac{p}{q}+1\right)}}{2}\,\varepsilon.$$

D'après l'hypothèse (iii), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$, on a

$$\int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy < \frac{K^{-\frac{p}{q}}}{2^{p+1}\|f\|_p^p}\,\varepsilon.$$

Ainsi pour tout $n > N$,

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p < \varepsilon,$$

i.e. $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Exercice 3 cf *Lieb and Loss* page 123.