
Solutions de la séance d'exercices 1 : Intégrale de Riemann

Rappel :

Soient f une fonction bornée et $\sigma = \{a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. On note : $m_k = \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$ et $M_k = \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$. On appelle somme de Riemann inférieure relativement à σ la quantité : $\underline{S}_f^\sigma := \sum_{k=1}^n m_k (a_k - a_{k-1})$. De même, la somme supérieure de Riemann de f relativement à σ est égale à $\overline{S}_f^\sigma := \sum_{k=1}^n M_k (a_k - a_{k-1})$. La somme inférieure de Riemann de f est définie par : $\underline{S}_f = \sup_\sigma \underline{S}_f^\sigma$. La somme supérieure de Riemann de f est définie par : $\overline{S}_f = \inf_\sigma \overline{S}_f^\sigma$.

Définition 1 Une fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si $\underline{S}_f = \overline{S}_f$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est alors définie par : $\int_a^b f(x) dx = \underline{S}_f = \overline{S}_f$.

Théorème 1 Une fonction f bornée est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que

$$\overline{S}_f^\sigma \leq \underline{S}_f^\sigma + \varepsilon.$$

1 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Exercice 1 1. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, il existe une subdivision $\sigma_1 = \{a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que $\overline{S}_f^{\sigma_1} \leq \underline{S}_f^{\sigma_1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque g est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, il existe une subdivision $\sigma_2 = \{b_0 = a < b_1 < \dots < b_p = b\}$ de $[a, b]$ telle que $\overline{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_g^{\sigma_2} + \frac{\varepsilon}{2}$. On note $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{c_0 = a < c_1 < \dots < c_{q-1} < c_q = b\}$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en ordonnant l'ensemble $\{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_p\}$ par ordre croissant, puis en identifiant les points qui apparaissent plusieurs fois (on obtient une subdivision de $[a, b]$ en q intervalles avec $\max\{n, p\} \leq q \leq n + p$). Puisque $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision *plus fine* que σ_1 , on a :

$$\overline{S}_f^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \overline{S}_f^{\sigma_1} \quad \text{et} \quad \underline{S}_f^{\sigma_1} \leq \underline{S}_f^{\sigma_1 \cup \sigma_2}. \quad (1)$$

De même,

$$\overline{S}_g^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \overline{S}_g^{\sigma_2} \quad \text{et} \quad \underline{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_g^{\sigma_1 \cup \sigma_2}. \quad (2)$$

De plus, sur un intervalle $]c_{k-1}, c_k[$ donné, on a :

$$\begin{aligned} \sup\{f(x) + g(x), x \in]c_{k-1}, c_k[\} &\leq \sup\{f(x), x \in]c_{k-1}, c_k[\} \\ &\quad + \sup\{g(x), x \in]c_{k-1}, c_k[\}. \end{aligned}$$

De même :

$$\inf\{f(x) + g(x), x \in]c_{k-1}, c_k[\} \geq \inf\{f(x), x \in]c_{k-1}, c_k[\} + \inf\{g(x), x \in]c_{k-1}, c_k[\}.$$

On en déduit que :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \overline{S}_f^{\sigma_1 \cup \sigma_2} + \overline{S}_g^{\sigma_1 \cup \sigma_2}, \quad (3)$$

et

$$\underline{S}_f^{\sigma_1 \cup \sigma_2} + \underline{S}_g^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2}. \quad (4)$$

En utilisant les inégalités (1), (2), (3) et (4), il vient alors :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \overline{S}_f^{\sigma_1} + \overline{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} + \varepsilon \leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2} + \varepsilon.$$

D'après le théorème 1, on en déduit que $f + g$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, de l'inégalité

$$\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2},$$

on déduit que

$$\sup_{\sigma_1, \sigma_2} \left(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} \right) \leq \sup_{\sigma_1, \sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2}.$$

Or

$$\sup_{\sigma_1, \sigma_2} \left(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} \right) = \sup_{\sigma_1} \underline{S}_f^{\sigma_1} + \sup_{\sigma_2} \underline{S}_g^{\sigma_2} = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\sup_{\sigma_1, \sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2} = \sup_{\sigma} \underline{S}_{f+g}^{\sigma} = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b (f(x) + g(x)) dx.$$

De même, l'inégalité

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \overline{S}_f^{\sigma_1} + \overline{S}_g^{\sigma_2}$$

implique $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. En conclusion, $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

2. · Pour $\lambda = 0$ il n'y a rien à démontrer.

· Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $\lambda > 0$, alors pour toute subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ de $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} \inf\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} &= \lambda \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} \\ \sup\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} &= \lambda \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \underline{S}_f^{\sigma}$ et $\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \overline{S}_f^{\sigma}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma} \underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \sup_{\sigma} \underline{S}_f^{\sigma} = \lambda \int_a^b f(x) dx = \lambda \inf_{\sigma} \overline{S}_f^{\sigma} = \inf_{\sigma} \overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.
 · Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $\lambda < 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ de $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} \inf\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} &= \lambda \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} \\ \sup\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} &= \lambda \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^\sigma = \lambda \overline{S}_f^\sigma$ et $\overline{S}_{\lambda f}^\sigma = \lambda \underline{S}_f^\sigma$. On en déduit que

$$\sup_\sigma \underline{S}_{\lambda f}^\sigma = \lambda \inf_\sigma \overline{S}_f^\sigma = \lambda \int_a^b f(x) dx = \lambda \sup_\sigma \underline{S}_f^\sigma = \inf_\sigma \overline{S}_{\lambda f}^\sigma.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

3. Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ telles que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. Alors

$$\inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} \leq \inf\{g(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}.$$

Il en découle que

$$\sup_\sigma \underline{S}_f^\sigma \leq \sup_\sigma \underline{S}_g^\sigma,$$

c'est-à-dire $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

4. Soit $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables, qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N > 0$ tel que $\forall i > N$, $\sup_{[a, b]} |f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$. En particulier, $f_i(t) - \varepsilon < f(t) < f_i(t) + \varepsilon$. Pour un tel i , on en déduit que pour toute subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$, on a

$$\sup_{]a_{k-1}, a_k[} f \leq \sup_{]a_{k-1}, a_k[} f_i + \varepsilon \quad \text{et} \quad \inf_{]a_{k-1}, a_k[} f \geq \inf_{]a_{k-1}, a_k[} f_i - \varepsilon$$

En particulier :

$$\sup_{]a_{k-1}, a_k[} f - \inf_{]a_{k-1}, a_k[} f \leq \sup_{]a_{k-1}, a_k[} f_i - \inf_{]a_{k-1}, a_k[} f_i + 2\varepsilon.$$

Il en découle que :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leq \overline{S}_{f_i}^\sigma - \underline{S}_{f_i}^\sigma + 2\varepsilon(b - a).$$

Comme f_i est Riemann-intégrable, d'après le théorème 1, il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $\overline{S}_{f_i}^\sigma - \underline{S}_{f_i}^\sigma \leq \varepsilon$. On en déduit que

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leq \varepsilon(1 + 2(b - a)),$$

ce qui implique que f est Riemann-intégrable.

2 Quelles sont les fonctions Riemann-intégrables ?

Exercice 2 Soit f une fonction croissante $[a, b]$. Pour montrer que f est Riemann-intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une subdivision de $[a, b]$ telle que $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a, b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a

$$\inf_{]a_{k-1}, a_k[} f = f(a_{k-1}) \quad \text{et} \quad \sup_{]a_{k-1}, a_k[} f = f(a_k).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) (f(a_k) - f(a_{k-1})) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n (f(a_k) - f(a_{k-1})) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right) (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Pour n assez grand, la subdivision régulière de $[a, b]$ satisfait $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. D'autre part, si g est décroissante, $f = -g$ est croissante, donc g est Riemann-intégrable par l'exercice 1.1 avec $\lambda = -1$.

Exercice 3 Une fonction f continue sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > 0$ tel que

$$|x - y| < \left(\frac{b-a}{n}\right) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a, b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a :

$$\sup_{]a_{k-1}, a_k[} f - \inf_{]a_{k-1}, a_k[} f \leq 2\varepsilon.$$

Il vient alors :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n 2\varepsilon = (b-a)2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure grâce au théorème 1 que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4 1. Considérons la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a :

$$\overline{S}_f^\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \underline{S}_f^\sigma = 0.$$

On en déduit que $1 = \sup_\sigma \overline{S}_f^\sigma \neq \inf_\sigma \underline{S}_f^\sigma = 0$, ce qui implique que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

2. Considérons la fonction $g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a :

$$\underline{S}_g^\sigma = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, la fonction g prend des valeurs supérieures à ε en un nombre fini de points seulement (les points $\frac{k}{q}$, avec $\frac{1}{q} > \varepsilon$). Notons x_i , $i = 1, \dots, p$ ces points ordonnés par ordre (strictement) croissant. On a $p \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$. Notons également δ le minimum de la distance entre deux de ces points. Considérons la subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_{2p} = b\}$ définie par $a_{2k-1} = x_i - \min(\frac{\delta}{3}, \varepsilon^3)$ pour $k = 1, \dots, p$, $a_{2k} = x_i + \min(\frac{\delta}{3}, \varepsilon^3)$ pour $k = 1, \dots, p-1$, et $a_{2p} = b$. Alors :

$$\overline{S}_g^\sigma \leq \varepsilon + p \min\left(\frac{\delta}{3}, \varepsilon^3\right) \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^3 \leq 2\varepsilon.$$

On en conclut que g est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 5 (facultatif) cf André Gramain, *Intégration*, p 7. Une copie vous sera distribuée.

3 Peut-on intervertir limite et intégrale ?

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-nx} = 0$. On en déduit que la suite de fonctions f_n converge ponctuellement (ou *simplement*) vers la fonction identiquement nulle $f \equiv 0$. On a $\int_a^b f(x) dx = 0$ mais

$$\int_a^b f_n(x) dx = 1 - e^{-n},$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = 1$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0, 1]$, car pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{]0, -\frac{1}{n} \log(\frac{\varepsilon}{n})[} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

4 Applications

Exercice 7 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Considérons la subdivision régulière $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$ de $[a, b]$. On a : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $m_k \leq f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq M_k$. On en déduit :

$$\underline{S}_f^\sigma \leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leq \overline{S}_f^\sigma,$$

d'où il découle que :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

On a :

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan \frac{k}{n} &= -\log(\cos 1) & b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} &= \frac{\pi}{4} \\ c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{n}{n+k} \right)^{\frac{1}{n}} &= -2 \ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Exercice 8 1.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(a+b-x) dx &= - \int_a^b f(a+b-x) (a+b-x)' dx \\ &= - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

où $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(x) = a + b - x$ est une fonction de classe C^1 .

2. a)

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x) \sin(\pi-x)}{1 + \cos^2(\pi-x)} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{(\cos x)'}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

où $\varphi : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $\varphi(x) = \cos x$ est une fonction de classe C^1 .

b)

$$\begin{aligned} J &:= \int_0^{\pi/4} \log(1 + \operatorname{tg}x) dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x}\right) dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg}x}\right) dx = \frac{\pi}{4} \log 2 - J \end{aligned}$$

d'où la valeur de l'intégrale est $J = \frac{\pi}{8} \log 2$.