Séance d'exercices 2 : Intégrales généralisées et théorie de la mesure

le 31 octobre 2006

1 Intégrales généralisées

Exercice 1 1. *Le but de cette question est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt.$$

Montrer que pour $n \geq 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$ est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, admettant des primitives notées F et G respectivement. Supposons que F est positive et décroissante. Montrer qu'il existe $y \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^y g(x)\, dx.$$

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.
4. *Le but de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale.* Pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$, on pose :

$$\begin{cases} f(t,\lambda) &= e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \qquad \text{pour} \quad t > 0 \\ f(0,\lambda) &= 1. \end{cases}$$

a) Pour $0 < x \leq y$, démontrer que l'on a :

$$\left| \int_x^y f(t,\lambda)\, dt \right| \leq \frac{2}{x} e^{-\lambda x}.$$

b) En déduire que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\, dt$ sont convergentes, uniformément pour $\lambda \geq 0$. On pose, pour $\lambda \geq 0$,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Démontrer que la fonction F est continue pour $\lambda \geq 0$.
c) Démontrer que la fonction F est dérivable pour $\lambda > 0$ et que sa dérivée est égale à l'intégrale généralisée convergente

$$F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t\, dt.$$

d) Calculer cette dernière intégrale généralisée, par exemple en intégrant par parties sur $[0,x]$ et en calculant la limite quand $x \to +\infty$.
e) En déduire la valeur de $F(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$ à une constante additive près. Démontrer que $F(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. En déduire la valeur de la constante additive, puis la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2 Théorie de la mesure

Exercice 2 Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre si et seulement si $\mathcal{A}$ est une algèbre et une classe monotone.

Exercice 3 Soit (Ω, Σ) un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$). Soit μ une mesure sur (Ω, Σ). Montrer les propriétés suivantes :
a) Si $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Sigma$ sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(\cup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$

b) Si $B \subset A$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
c) *Monotonie :* Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.
d) *Principe inclusion-exclusion :* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
c) Si $A_i \subset \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, alors $\mu\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$. *(Rappelons que l'on a égalité si l'union est disjointe.)*