Séance d'exercices 4 : Fonctions mesurables, Intégrale de Lebesgue

le 14 novembre 2006

Exercice 1 Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\qquad \text{et} \qquad (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

Exercice 2 Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f\ : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrer que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq A \\ A & \text{si} \quad f(x) > A \end{cases}$$

est $(\Sigma\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Exercice 3 Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \sharp E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f\ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Montrer que f est $(\Sigma\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et que :

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Exercice 4 Soit (Ω, Σ) un espace mesurable. On dit que $\varphi\ : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *fonction simple* ou *étagée* si φ est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si φ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbb{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j$, $c_i \neq c_j$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$. Soit φ une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de φ par rapport à une mesure μ est définie par :

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_\varphi(t)\right)\, dt,$$

où $S_\varphi(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\}$.

1. Montrer que
$$\int_\Omega \varphi\, d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive, $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions simples positives telle que :
   (a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Exercice 5 Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f\,d\mu.$$

Monter que λ définit une mesure sur (Ω, Σ).

Exercice 6 Soit $f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p}\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

Calculer l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de deux manières différentes :

(i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;

(ii) En calculant la mesure des ensembles $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ et la définition de l'intégrale de Lebesgue.