Solution de la séance d'exercices 4 : Fonctions mesurables, Intégrale de Lebesgue

Exercice 1 (a) Montrons que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a,b] \subset]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Donc $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
- Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} (a - \frac{1}{n}) \leq x \leq \lim_{n\to+\infty} (b + \frac{1}{n}),$$

c'est-à-dire $x \in [a,b]$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\subset [a,b]$ et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.

(b) Montrons que $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset (a,b)$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset (a,b)$.
- Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Ainsi $x \in (a,b)$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset (a,b)$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Exercice 2 Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Montrons que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x) < -A \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq A \\ A & \text{si} \quad f(x) > A \end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}\left(]-\infty, -A)\right), \\ E_2 &:= \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leq A\} = f^{-1}\left([-A, A]\right), \\ E_3 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}\left((A, +\infty[\right). \end{aligned}$$

Comme $]-\infty, -A)$, $[-A, A]$, $(A, +\infty[$ appartiennent à la tribu borélienne et f est $(\Sigma\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, les ensembles E_1, E_2, et E_3 appartiennent à Σ. Alors $f_A = f \cdot \mathbb{1}_{E_2} - A \cdot \mathbb{1}_{E_1} + A \cdot \mathbb{1}_{E_3}$ est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

Exercice 3 Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \sharp E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien E, $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc f est $(\Sigma\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_f(t)\right) dt,$$

où $S_f(t) = \{n \in \Sigma,\ f(n) > t\}$. Pour tout $y \in [0, +\infty[$, posons $A_y := \{n \in \mathbb{N},\ f(n) = y\}$. Alors

$$S_f(t) = \cup_{y>t} A_y$$

où l'union est disjointe et où A_y est vide sauf pour un ensemble dénombrable $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de valeurs de y. Par σ-additivité de la mesure μ,

$$\mu\left(S_f(t)\right) = \mu\left(\cup_{y_i > t} A_{y_i}\right) = \sum_{y_i > t} \mu\left(A_{y_i}\right) = \sum_{y_i > t} \mu\left(\{f = y_i\}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \int_0^\infty \sum_{y_i>t} \mu(\{f=y_i\})\, dt = \sum_{i=0}^\infty \int_{0\le t<y_i} \mu(\{f=y_i\})\, dt \\ &= \sum_{i=0}^\infty y_i\cdot \mu(\{f=y_i\}) = \sum_{i=0}^\infty y_i \cdot \sharp\{n\in\mathbb{N}, f(n)=y_i\} = \sum_{n=0}^\infty f(n).\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit φ une fonction simple positive :

$$\varphi = \sum_{j\in J} c_j \mathbb{1}_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i\neq j$, $c_i \neq c_j$ et $E_i\cap E_j=\emptyset$.

1. On a

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu = \int_0^\infty \mu(S_\varphi(t))\, dt,$$

où $S_\varphi(t)=\{x\in\Omega, \varphi(x)>t\} = \cup_{c_j>t} E_j$ et où $\mu(S_\varphi(t)) = \sum_{c_j>t}\mu(E_j)$. Ainsi

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu = \int_0^\infty \sum_{c_j>t}\mu(E_j)\, dt = \sum_{j\in J}\int_0^{c_j} \mu(E_j)\, dt = \sum_{j\in J} c_j\mu(E_j).$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned} E_{k,n} &:= \{x\in\Omega,\ k\,2^{-n}\le f(x)<(k+1)2^{-n}\} \quad \text{pour} \quad k=0,\dots,n\,2^n-1, \\ E_{n,n} &:= \{x\in\Omega,\ f(x)\ge n\} \quad \text{pour} \quad k=n\,2^n.\end{aligned}$$

Puisque f est mesurable, les ensembles $E_{k,n}$ appartiennent à Σ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, les ensembles $E_{k,n}$, $0\le k\le n2^n-1$ sont deux à deux disjoints et $\cup_k E_{k,n}=\Omega$. Posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^{-n}-1} k\,2^{-n}\mathbb{1}_{E_{k,n}}.$$

Alors φ_n est une fonction simple positive vérifiant $\varphi_n\le f$. En outre $0\le\varphi_n(x)\le\varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=f(x)$ pour tout $x\in\Omega$.

Exercice 5 Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré et $f\in\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Pour tout $E\in\Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A\cdot f\, d\mu.$$

Montrons que λ définit une mesure sur (Ω,Σ).
$1^{ère}$ *méthode :* On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 4, toute fonction $f\in\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$ s'écrit $f=\sup_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$, où les φ_n sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que λ est une mesure.
2^{de} *méthode :* On a clairement $\lambda(\emptyset)=0$. Il suffit donc de vérifier la σ-additivité de λ. Soit $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\, d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\, d\mu \\ &= \int_\Omega\left(\sum_{i=1}^\infty \mathbb{1}_{E_i}\right) f\, d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty (\mathbb{1}_{E_i} f)\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega (\mathbb{1}_{E_i} f)\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^\infty \lambda(E_i).\end{aligned}$$

Exercice 6 Soit $f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p}\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

(i) On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p}\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}(x)\,dx = \int_{|x|<1} |x|^{-p}\,dx = \int_{r=0}^{1}\int_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}} r^{n-p-1}drd\sigma \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-p-1}\,dr.
\end{aligned}$$

Pour $n \leq p$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty.$$

Pour $p < n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{r^{n-p}}{(n-p)}\right]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(ii) Pour $a \in [0, +\infty[$,

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p}\mathbb{1}_{|x|<1} > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} > a\} \cap \mathcal{B}(0,1),$$

où $\mathcal{B}(0,1)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\} \cap \mathcal{B}(0,1).$$

On en déduit que $S_f(a) = \mathcal{B}(0,1)$ si $a^{-\frac{1}{p}} > 1$, i.e. si $a < 1$ et que $S_f(a)$ est égale à la boule $\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})$ de centre 0 et de rayon $a^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $a \geq 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \mu\left(S_f(a)\right)\,da = \int_0^1 \mu\left(\mathcal{B}(0,1)\right)\,da + \int_1^{+\infty} \mu\left(\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})\right)\,da \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}}\,da.
\end{aligned}$$

Si $p \geq n$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty$ et pour $p < n$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left[\frac{a^{-\frac{n}{p}+1}}{-\frac{n}{p}+1}\right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(1 + \frac{p}{n-p}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.
\end{aligned}$$