Séance d'exercices 5 : Théorème de convergence monotone, dominée et Lemme de Fatou

le 21 novembre 2006

Exercice 1 1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Montrer que

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$

où Γ est la fonction d'Euler et où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. (On pourra considérer les fonctions $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$.)

Exercice 2 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante vers $f = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$. Bien que les fonctions f_n soient uniformément bornées par 1 et que les intégrales des f_n sont finies, on a :

$$\int_\Omega f \, d\mu = +\infty.$$

Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ce cas ?

Exercice 3 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,+\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone décroissante et converge uniformément vers 0, mais

$$0 = \int_\Omega f \, d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu = +\infty.$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Exercice 4 Soit $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que

$$\int_\Omega f \, d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Exercice 5 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = -\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ mais que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu < \int_\Omega f \, d\mu.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$ tel que $\int_\Omega f \, d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\mu\{x \in \Omega,\ f(x) = +\infty\} = 0.$$

On pourra considérer les fonctions $f_n = n\mathbb{1}_{\{f\geq n\}}$.

Exercice 7 Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Exercice 8 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x) \ ?$$

Exercice 9 On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $f_+ := \max\{f, 0\}$ et $f_- = \max\{-f, 0\}$ vérifient $\int_\Omega f_+ \, d\mu < +\infty$ et $\int_\Omega f_- \, d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, on pose

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f_+ \, d\mu - \int_\Omega f_- \, d\mu.$$

(a) Montrer l'équivalence

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$$

et

$$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu. \tag{1}$$

(b) Montrer que si f est mesurable, g intégrable et $|f| \leq |g|$, alors f est intégrable et

$$\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega |g| \, d\mu.$$

(c) On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite intégrable si la partie réelle $\mathrm{Re} f$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im} f$ de f sont intégrables. On pose alors

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_\Omega \mathrm{Im} f \, d\mu.$$

Montrer que l'inégalité (1) est vérifiée.