Solution de la séance d'exercices 5 : Théorème de convergence monotone, dominée et Lemme de Fatou

Exercice 1 1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Alors $f_k = \sum_{n=1}^k g_n$ est une suite croissante de $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. D'après le théorème de convergence monotone

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

2. Posons $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$. Les g_n appartiennent à $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Or d'une part,

$$\int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega x^{s-1}e^{-nx}\mathbb{1}_{[0,+\infty)} \, dx = \frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-y}\, dy = \frac{1}{n^s}\Gamma(s),$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s).$$

D'autre part,

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\, dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx,$$

d'où l'égalité cherchée.

Exercice 2 Oui, le théorème de convergence monotone ne dit pas que l'intégrale de f est finie. On a bien

$$+\infty = \int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} n.$$

Exercice 3 Non, le théorème de convergence monotone ne s'applique pas à une suite décroissante de fonctions positives.

Exercice 4 Non, la suite de fonctions n'est pas même monotone.

Exercice 5 En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

i.e. f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim\inf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu = \lim\inf_{n\to+\infty} -\int_0^n \frac{1}{n}\, d\mu = -1.$$

D'autre part $\int_\Omega f\, d\mu = 0$. Le lemme de Fatou ne s'applique pas car les fonctions f_n ne sont pas à valeurs dans $[0,+\infty]$.

Exercice 6 On a

$$\mu\left(f=+\infty\right)=\mu\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{f\geq n\}\right).$$

Puisque les ensembles $A_n:=\{f\geq n\}$ vérifient $A_1\supset A_2\supset A_3\dots$, par continuité de la mesure, on a :

$$\mu\left(f=+\infty\right)=\lim_{n\to+\infty}\mu\left(f\geq n\right).$$

Or, comme f est à valeurs positives, les fonctions f_n définies par $f_n=n\mathbb{1}_{\{f\geq n\}}$ vérifient $f_n\leq f$. Ainsi

$$\int_\Omega f_n\,d\mu=\int_\Omega n\mathbb{1}_{\{f\geq n\}}\,d\mu=n\mu\left(f\geq n\right)\ \leq\ \int_\Omega f\,d\mu<+\infty.$$

On en déduit que

$$\mu\left(f\geq n\right)\ \leq\ \frac{1}{n}\int_\Omega f\,d\mu\to 0,$$

donc

$$\mu\left(f=+\infty\right)=0.$$

Exercice 7 Puisque $\mu(\Omega)<+\infty$, la fonction constante égale à C est intégrable, d'intégrale $C\,\mu(\Omega)$. Une application directe du théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu=\int_\Omega f\,d\mu.$$

Exercice 8 Soit $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Comme $\cos(\pi x)<1$ si $x\notin\mathbb{Z}$, $\cos^n(\pi x)\to 0$ lorsque $n\to\infty$ presque partout (pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Notons $f_n(x)=f(x)\cos^n(\pi x)$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $|f_n(x)|\leq|f(x)|$ et comme $|f|\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R} f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R} f_n(x)d\lambda(x)=\int_\mathbb{R}\lim_{n\to\infty}f_n(x)d\lambda(x)=0.$$

Exercice 9 (a) Par définition, $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ si et seulement si f_+ et f_- sont intégrables. On note que $|f|=f_++f_-$. Donc $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)\Rightarrow|f|\in\mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Réciproquement, on a $0\leq f_\pm\leq|f|$, donc $|f|\in\mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)\Rightarrow f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. D'autre part :

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\ =\ \left|\int_\Omega f_+\,d\mu-\int_\Omega f_-\,d\mu\right|\ \leq\ \int_\Omega f_+\,d\mu+\int_\Omega f_-\,d\mu\ =\ \int_\Omega|f|\,d\mu.$$

(b) Par monotonicité de l'intégrale, on a

$$\int_\Omega|f|\,d\mu\ \leq\ \int_\Omega|g|\,d\mu<+\infty.$$

D'après la question (a), il en découle que f est intégrable.

(c) Définissons $z=\int_\Omega f\,d\mu$. Comme z est un nombre complexe, il s'écrit $z=|z|e^{i\theta}$. Soit u la partie réelle de $e^{-i\theta}f$. On a $u\leq|e^{-i\theta}f|=|f|$. Donc

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\ =\ e^{-i\theta}\int_\Omega f\,d\mu\ =\ \int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu\ =\ \int_\Omega u\,d\mu\ \leq\ \int_\Omega|f|\,d\mu,$$

où la troisième égalité découle du fait que le nombre $\int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu$ est réel donc est l'intégrale de la partie réelle de $e^{-i\theta}f$ c'est-à-dire de u.