Séance d'exercices 6 : Théorème de convergence monotone, dominée et Lemme de Fatou (suite)

le 28 novembre 2006

Exercice 1 Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On dit que f_n converge vers f *en mesure* si pour tout ε,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{x \in \Omega,\ |f_n(x) - f(x)| \ > \varepsilon\} \ = 0.$$

Montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout.

Exercice 2 Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

Exercice 3 (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ est une suite croissante et

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(b) Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx} d\lambda(x)$$

où $b > 1$.

Exercice 4 Montrer que

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m dx = m!$ (pour tout $m \in \mathbf{N}$).

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$

Exercice 5 Montrer le théorème suivant (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis) :

Théorème 1 (Dérivation sous le signe $\int$) Soit $f \ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

(i) Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, la fonction $x \mapsto f(x, s)$ est intégrable ;

(ii) pour presque tout x, la fonction $s \mapsto f(x, s)$ est dérivable sur (s_1, s_2) ;

(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tel que $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}| \leq g(x)$ pour tout $s \in [s_1, s_2]$ et pour presque tout $x \in \Omega$.

Alors la fonction $I(s) := \int_\Omega f(x, s)\, d\mu(x)$ est dérivable sur (s_1, s_2) et

$$\frac{dI}{ds} = \int_\Omega \frac{\partial f(x, s)}{\partial s}\, d\mu(x).$$

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixy} f(x) dx,$$

montrer que

a) $\hat{f}$ est continue,

b) $\hat{f}$ est bornée et $\sup |\hat{f}| \leq \|f\|_{L^1}$ $(=\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx)$,

c) Si $x \to xf(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{dy}\ \hat{f} \ = \widehat{-ixf(x)}.$$